Ciclo de Seminários Técnicos

A Transformada de Fourier e Suas Aplicações

Joseana Macêdo Fechine
Grupo PET Computação

DSC/CEEI/UFCG

Agenda

- Motivação
- Transformada de Fourier:
  - Breve Histórico
  - Conceitos Básicos
  - Aplicações
- Considerações Finais

Motivação

Por que utilizar uma transformada?

- Alguns problemas são difíceis de solucionar diretamente. Pode ser mais fácil resolver o problema transformado e aplicar a transformada inversa na solução.
    - Deve-se levar em consideração a dificuldade envolvida em aplicar a transformada ao problema original e em aplicar a transformada inversa na solução do problema transformado.

Motivação

Por que utilizar uma transformada?

- A representação de um sinal no domínio do tempo (do espaço, ...) está presente, naturalmente, no nosso dia a dia.

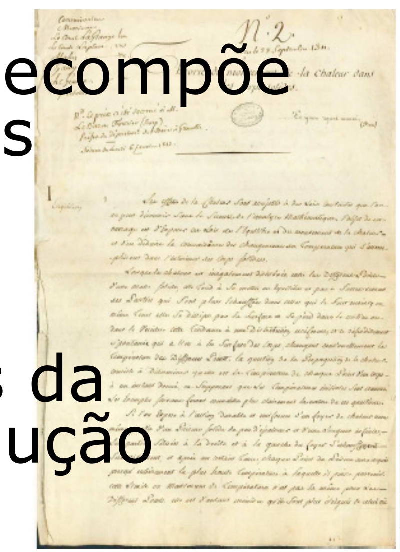
- Certas operações tornam-se muito mais simples e esclarecedoras se trabalharmos no domínio da freqüência, domínio este, conseguido a partir das **Transformadas de Fourier (TF)**.

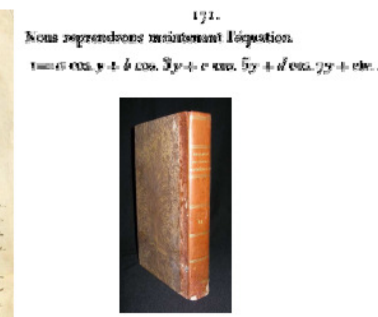
Transformada de Fourier: Histórico

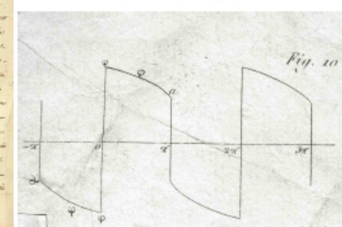
- **Século XVII**: matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) demonstrou que qualquer forma de onda pode ser representada por uma somatória de senóides e cossenóides de diferentes frequências, amplitudes e fases.

- **Transformada de Fourier**: decompõe um sinal em suas componentes elementares seno e cosseno.

- **Aplicação inicial**: problemas da condução do calor (lei da condução térmica).







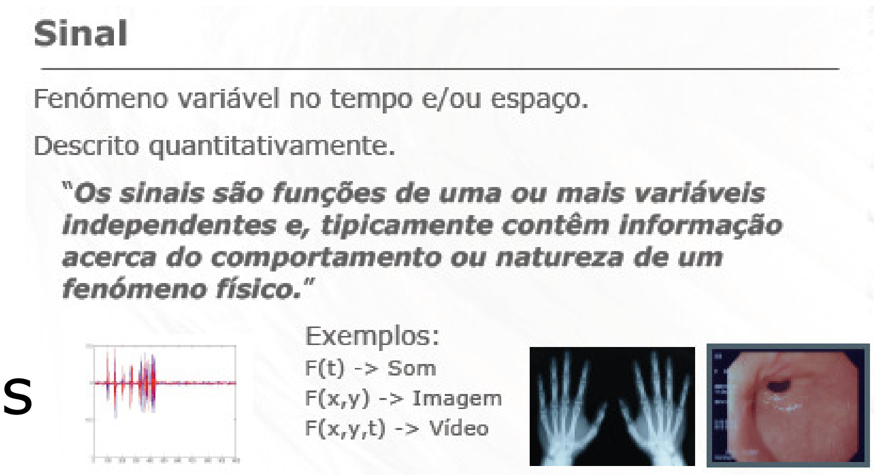
Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Importante:

- Funções periódicas são representadas por séries de Fourier;
- Funções não-periódicas são representadas por transformadas de Fourier (espectro do sinal);
- Uma representação de f(x) é uma decomposição em componentes que também são funções;
  - As componentes dessa decomposição são as funções trigonométricas sen(x) e cos(x).

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

- **Aplicações da TF**:
  - Física
  - Química
  - Teoria dos números
  - Análise combinatória
  - **Processamento de sinais**
  - Teoria das probabilidades
  - Estatística
  - Criptografia
  - e outras áreas.



Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

- **Subáreas de aplicação da TF**:
  - Descrição
  - Filtragem
  - Segmentação
  - Compressão
  - Reconstrução
  - Reconhecimento de padrões

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Como representar um sinal por uma Série de Fourier?

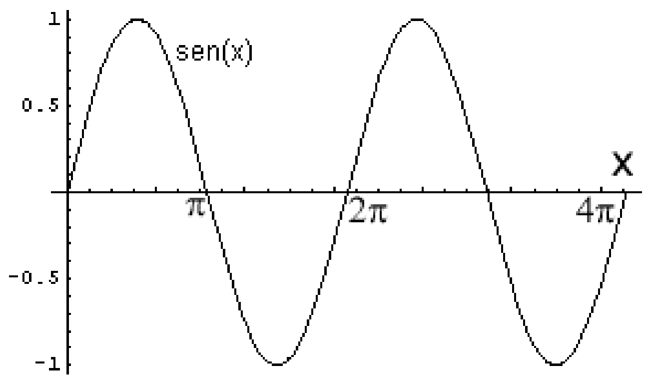
Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Qualquer função ***f(x)*** pode, segundo Fourier, ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno da seguinte forma geral:

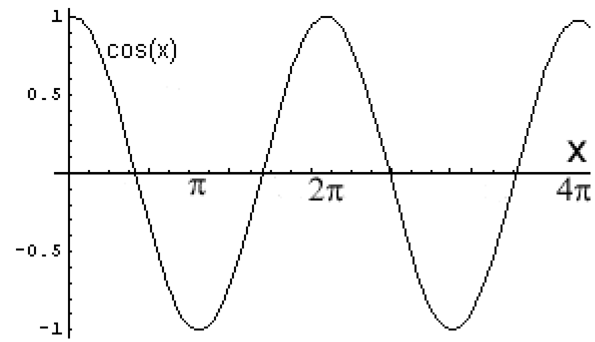
$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1 sen(x) + a_2 sen(2x) + a_3 sen(3x) + \ldots \\
+ b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \ldots
\end{aligned}
$$

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

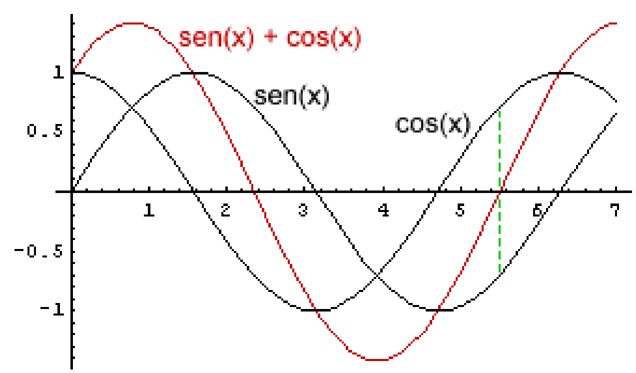
- **Como isso é possível?**



+

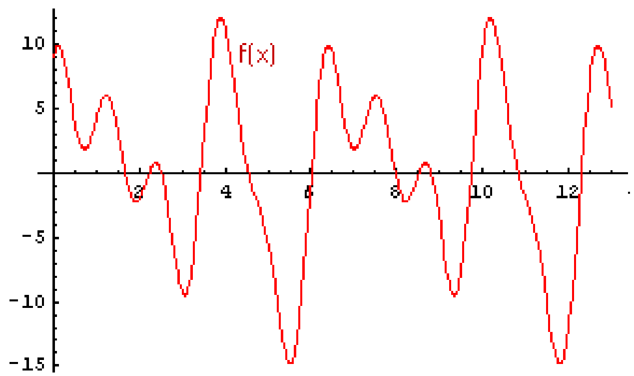


=

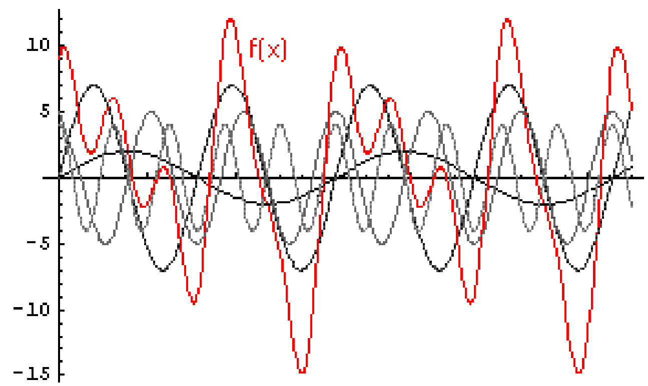


Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

- **Como isso é possível?**



?

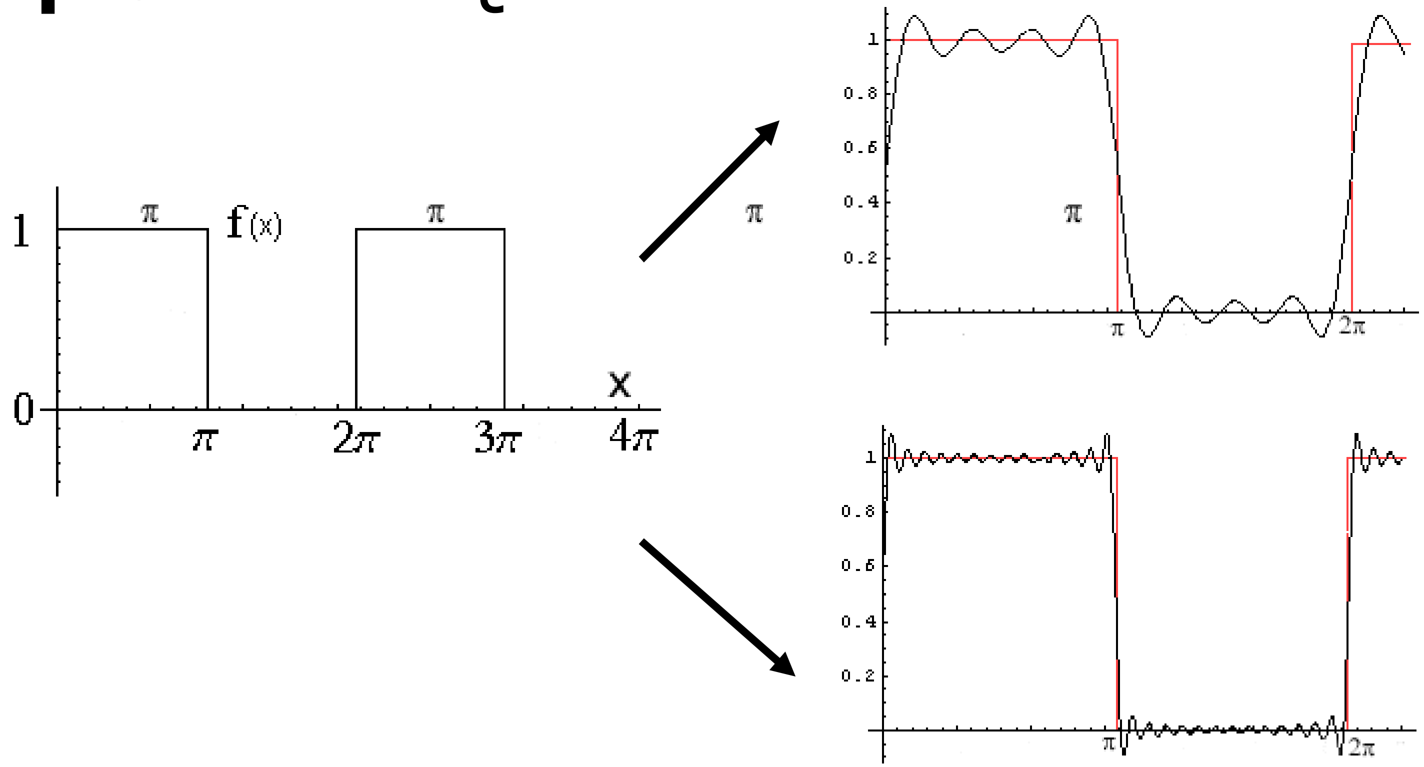


Decomposição da função *f(x)*:

$$f(x) = 2sen(x) + 7sen(2x) + 5\cos(3x) + 4\cos(5x)$$

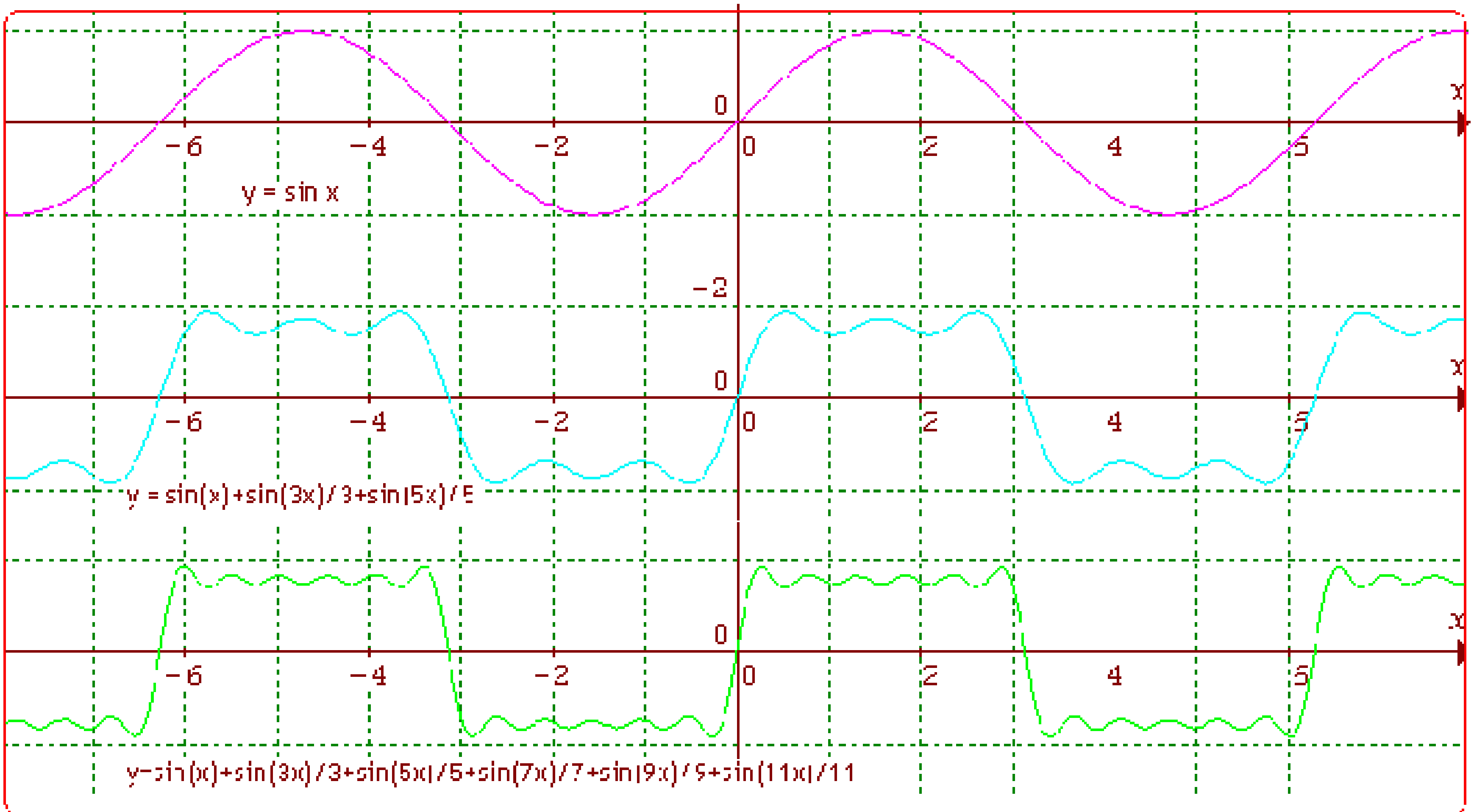
Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

- **Exemplo**: Onda Quadrada



$$f(x) = 1/2 + (2/\pi)\ \mathrm{sen}(x) + (2/(3\pi))\ \mathrm{sen}(3x) + (2/(5\pi))\ \mathrm{sen}(5x) + (2/(7\pi))\ \mathrm{sen}(7x) + \ldots$$

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos



Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Como calcular a Transformada de Fourier de um sinal?

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Transformada de Fourier Unidimensional

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x)] \equiv F(w_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi w_x x} dx}$$

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.}$$

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Transformada de Fourier Bidimensional

$$\mathcal{F}[f(x,y)] \equiv F(w_x, w_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-2i\pi(w_x x + w_y y)}\,dx\,dy,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w_x, w_y)] \equiv f(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(w_x, w_y)e^{2i\pi(w_x x + w_y y)}\,dw_x\,dw_y,$$

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

- O fato de utilizar um número infinito de amostras no domínio do tempo e, consequentemente, um número infinito de pontos no domínio da freqüência, representa um problema para implementação da TF na prática (**computadores**).

- **Transformada Discreta de Fourier (DFT)**: utiliza um número finito de pontos no domínio do tempo e define uma representação discreta do sinal no domínio da frequência.

- **Ferramentas Computacionais**: Matlab, Mathematica, Math

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Transformada Discreta de Fourier Unidimensional

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x)] \equiv F(w_x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-2i\pi w_x x/N}, \quad \text{para } \mathrm{w_x} = 0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1.}$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[F(w_x)] \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{w_x=0}^{N-1} F(w_x) e^{2i\pi w_x x/N}, \quad \text{para } \mathrm{x} = 0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1.}$$

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Transformada Discreta de Fourier: Bidimensional

$$\mathcal{F}[f(x,y)] \equiv F(w_x,w_y) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x,y) e^{-2i\pi(w_x x/N + w_y y/M)},$$

$$\text{para } w_x = 0,1,\cdots,N-1 \text{ e } w_y = 0,1,\cdots,M-1 \, .$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w_x,w_y)] \equiv f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{w_x=0}^{N-1} \sum_{w_y=0}^{M-1} F(w_x,w_y) e^{2i\pi(w_x x/N + w_y y/M)},$$

$$\text{para } x = 0,1,\cdots,N-1 \text{ e } y = 0,1,\cdots,M-1 \, .$$

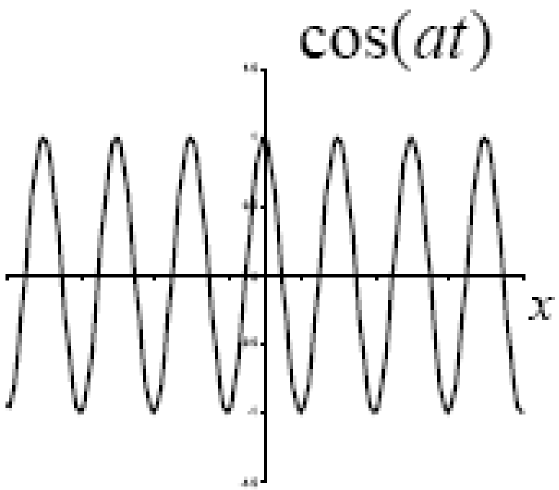
Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

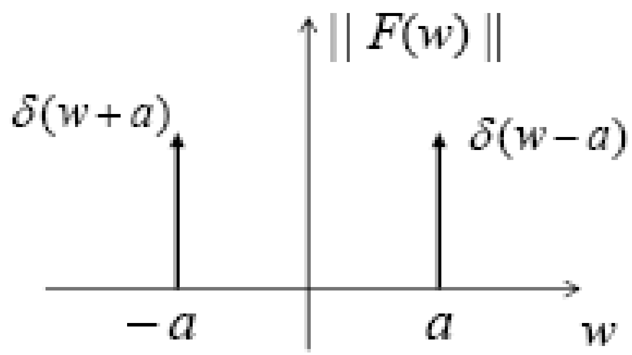
Algoritmo importante para cálculo da DFT:

- **FFT (*Fast Fourier Transform*)**
- Computa a DFT quando o tamanho N da sequência é uma potência de 2.
- Complexidade: $O(n \log n)$ contra $O(n^2)$ para o cálculo pela definição.

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Transformada de Fourier: Sinais Senoidais





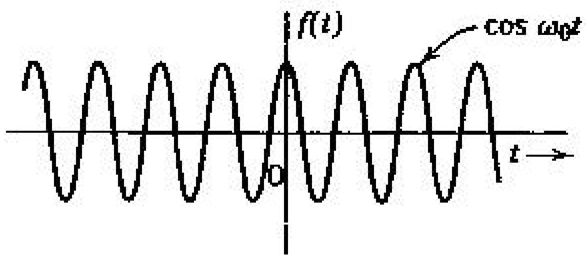
$$F(w) = \frac{1}{2}\left[\delta(w+a) + \delta(w-a)\right]$$

Exemplo: FFT SpecMusEV e SoundForge

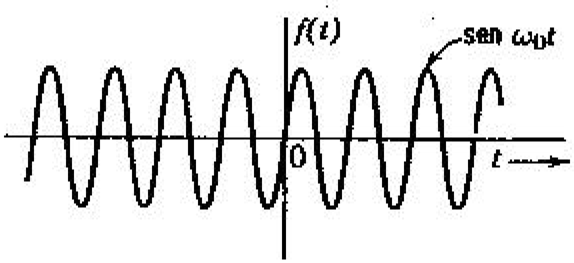
Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Transformada de Fourier: Sinais Senoidais

$$\Im[\cos\omega_0 t] = \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos\omega_0 t.e^{-j\omega t}$$



$$\Im[\cos\omega_0 t] = \lim_{\tau\to\infty}\{\frac{\tau}{2}Sa[\frac{\tau(\omega-\omega_0)}{2}] + \frac{\tau}{2}Sa[\frac{\tau(\omega+\omega_0)}{2}]\}$$

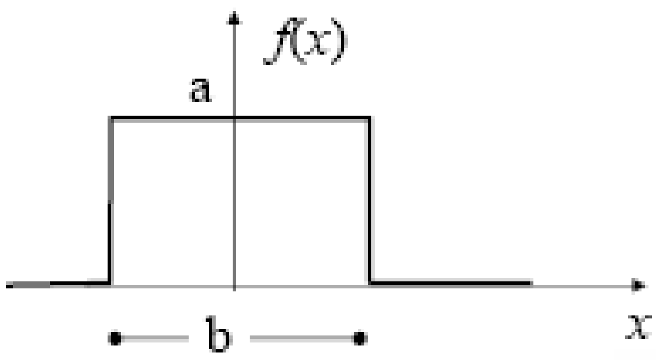


$$\boxed{\Im[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]}$$

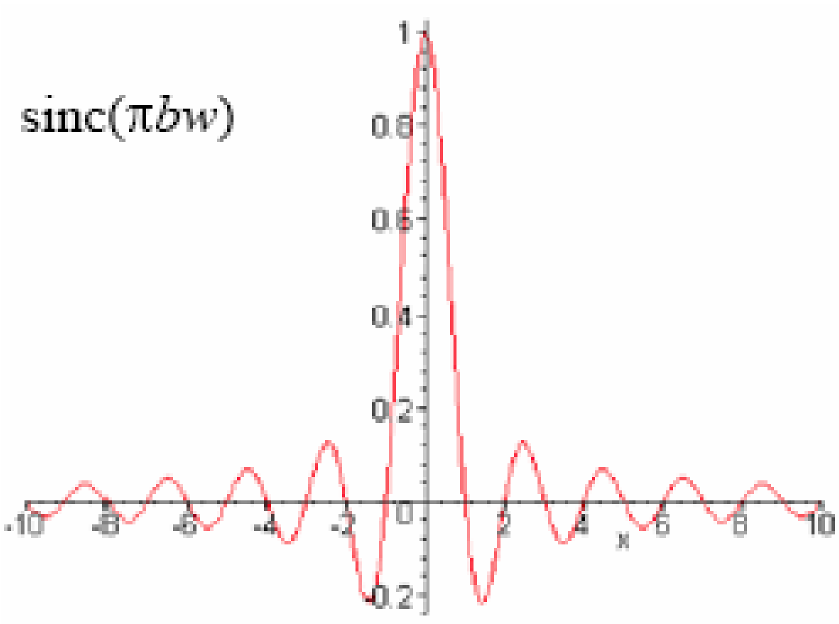
Da mesma forma, podemos mostrar que:

$$\boxed{\Im[sen\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]}$$

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

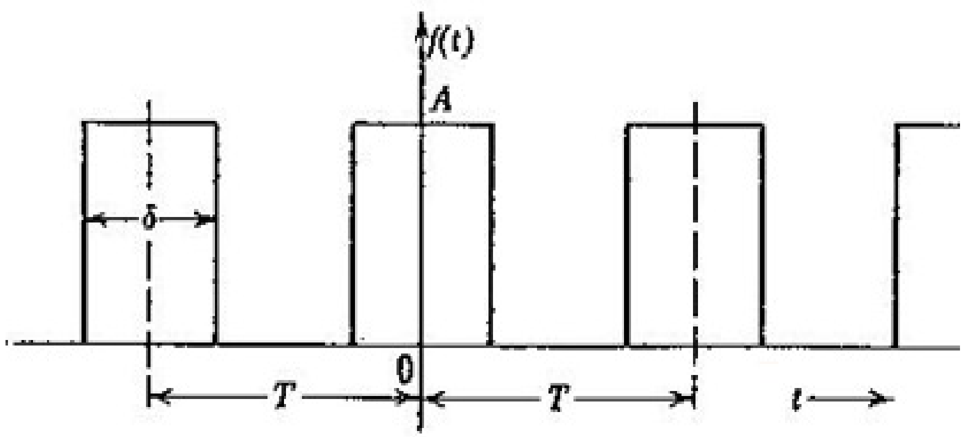


$$F(w) = ab\frac{\sin(\pi wb)}{\pi wb}$$



Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

$$f(t) = \begin{cases} A\left(-\delta/2 < t < \delta/2\right) \\ 0\left(\delta/2 < t < T-\delta/2\right) \end{cases}$$



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\delta/2}^{T-\delta/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\delta/2}^{\delta/2} Ae^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{-A}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-\delta/2}^{\delta/2}$$

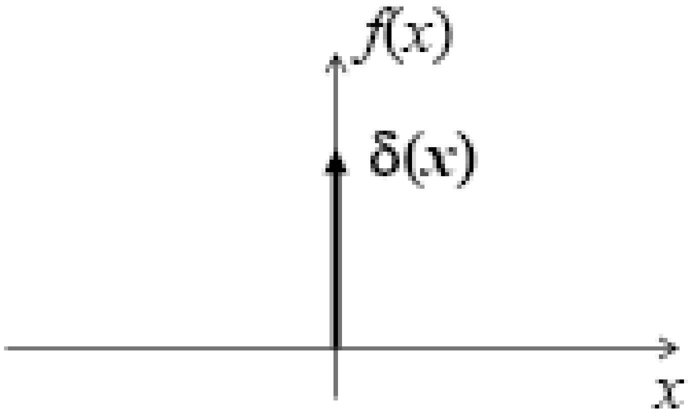
$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}\frac{\left(e^{jn\omega_0\delta/2} - e^{-jn\omega_0\delta/2}\right)}{2j}$$

$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}\sin(n\omega_0\delta/2)$$

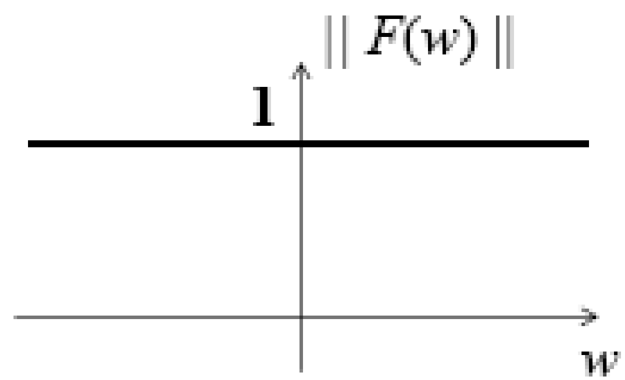
$$= \frac{A\delta}{T}\left[\frac{\sin\left(n\omega_0\delta/2\right)}{n\omega_0\delta/2}\right]$$

Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Transformada de Fourier: Função Impulso



$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i2\pi wx} dx = e^{0} = 1$$

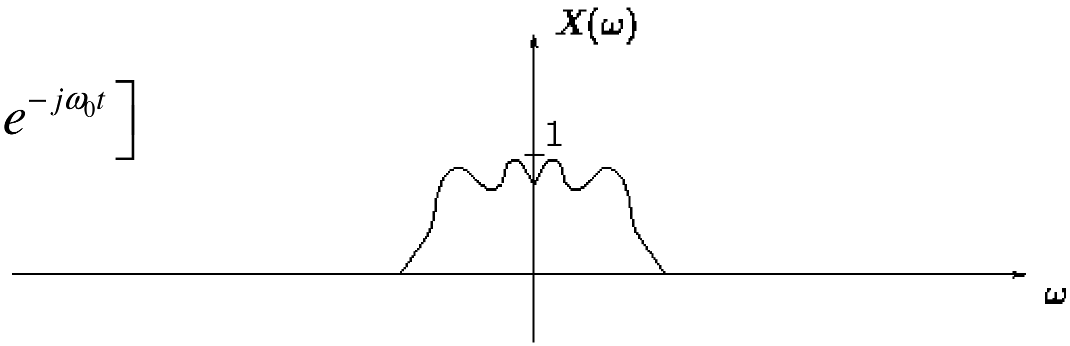


Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

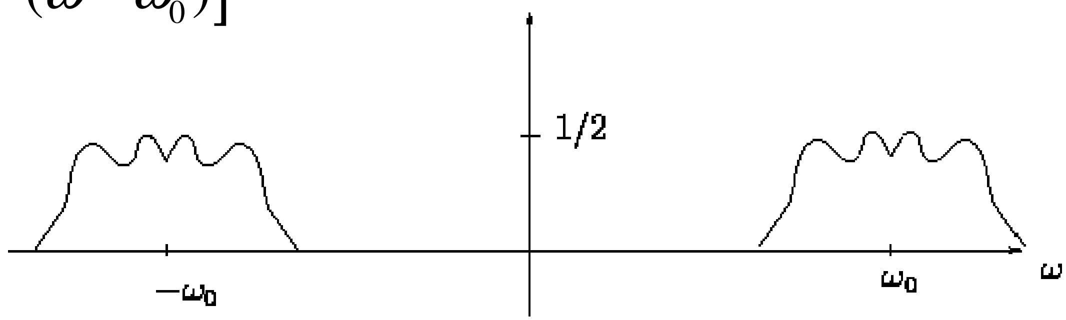
Propriedade: Deslocamento em Freqüência

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

$$f(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[f(t)e^{j\omega_0 t} + f(t)e^{-j\omega_0 t}\right]$$



$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)\right]$$



Transformada de Fourier: Conceitos Básicos

Propriedade: Convolução

$$h(x) = f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

$$F(\omega) \leftarrow f(x) \qquad G(\omega) \leftarrow g(x)$$

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

$$h(x) \leftarrow H(\omega)$$

Transformada de Fourier: Aplicações

Onde aplicar a

Transformada de Fourier?

Transformada de Fourier: Aplicações

Exemplos: Transformada Unidimensional

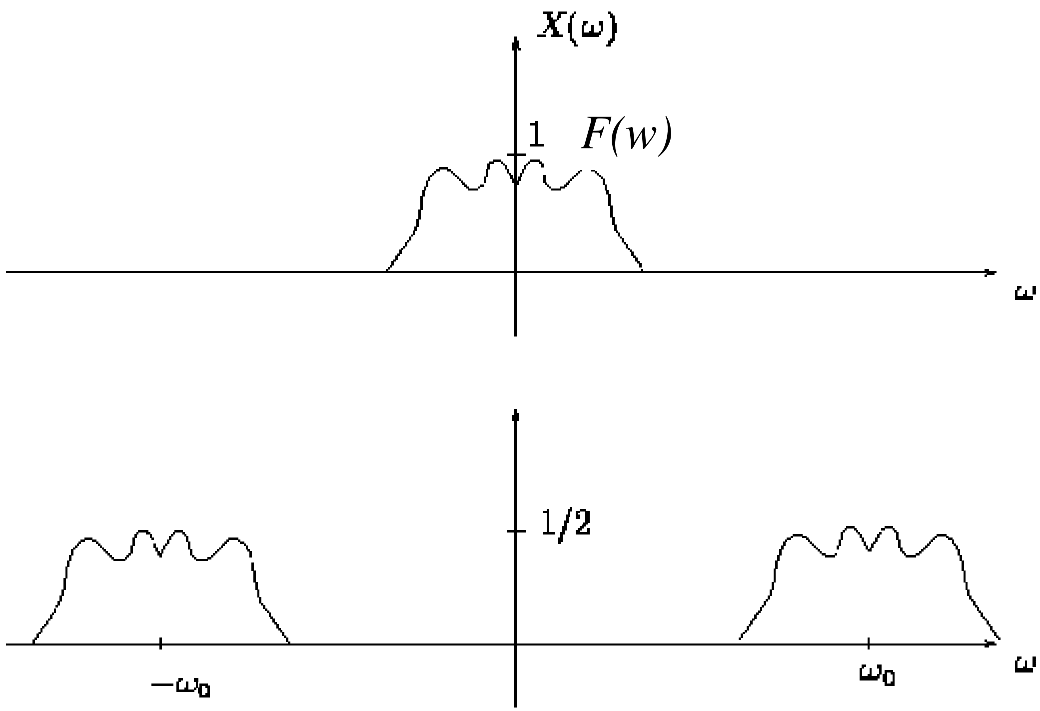
- Modulação de Sinal
- Processamento de Áudio e de Voz
  - Filtragem Passa-baixa
  - Filtragem Passa-faixa
  - Filtragem Passa-alta
- Processamento de Música
  - Determinação do tipo de instrumento (harmônicos)

Transformada de Fourier: Aplicações

Sistemas de comunicação (Modulação):

Multiplica-se um sinal f(t) por um sinal senoidal.

Transladar o espectro de freqüência.



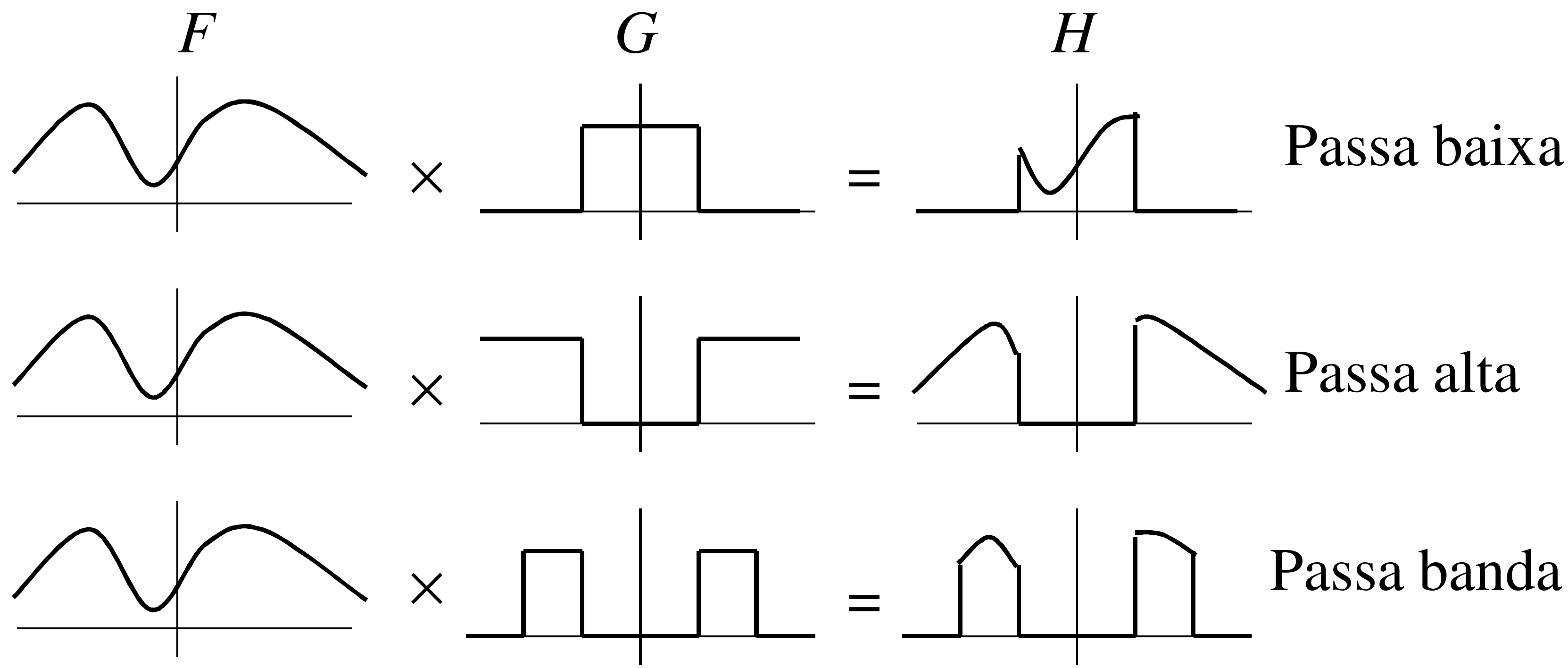
Transformada de Fourier: Aplicações

Sinais de Áudio e de Voz:

- Baixas frequências: caráter grave
- Altas frequências: caráter agudo

Transformada de Fourier: Aplicações

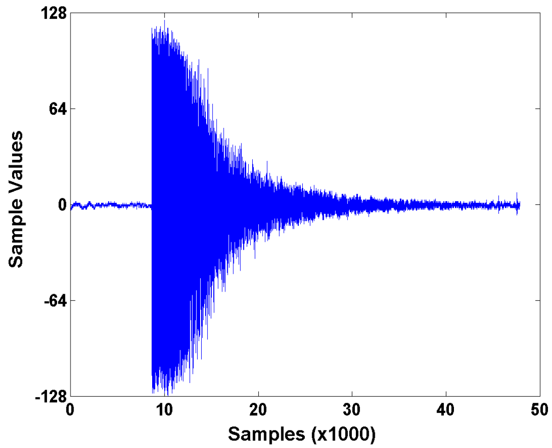
Filtragem (Domínio da Frequência)



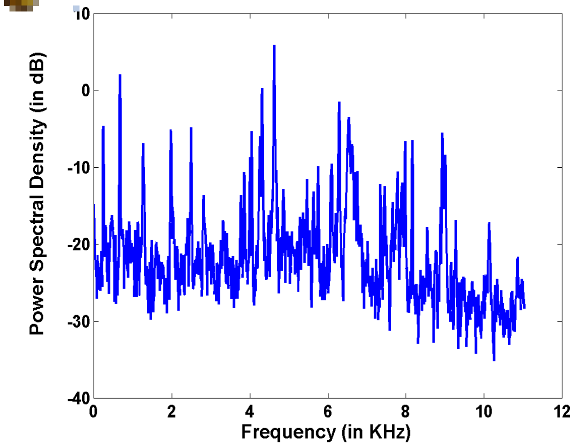
- **Filtragem no domínio original:** convolução
- **Filtragem no domínio da frequencia:** transformada, seguida de um produto e de uma transformada inversa

Transformada de Fourier: Aplicações

Espectro de sinal áudio



Sinal áudio “bell.wav”

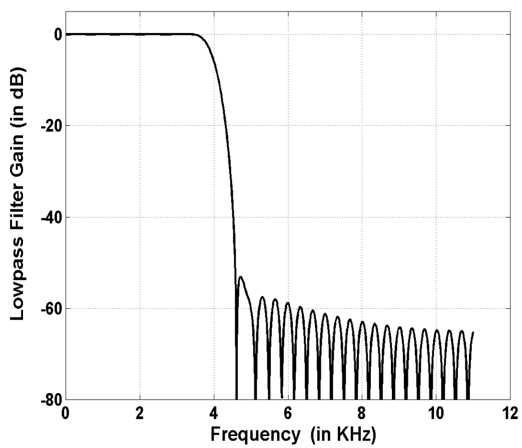


Espectro de Frequência

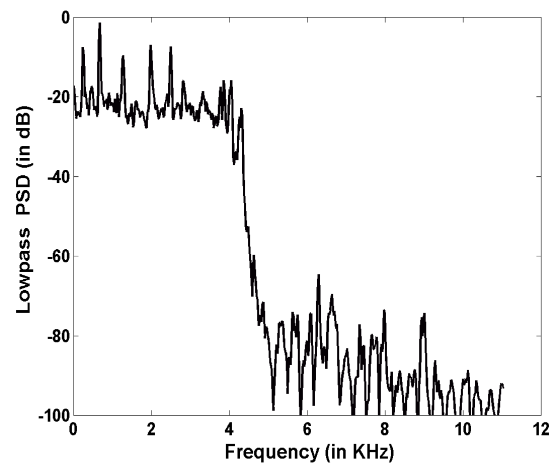
O sinal foi amostrado com a frequência de amostragem de 22050 com 8 bits de resolução. A densidade espectral da potência mostra que o sinal tem componentes de frequência na gama 0-11025 Hz.

Transformada de Fourier: Aplicações

Ganho do Filtro e Saída



Características de Ganho de Frequência do Filtro

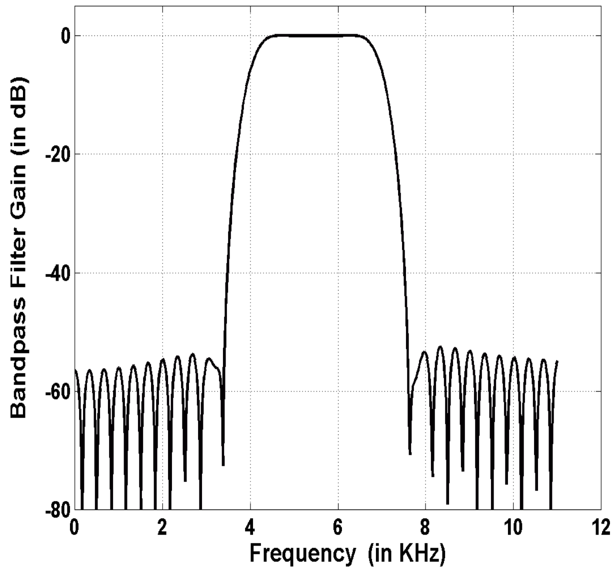


Espectro do sinal filtrado

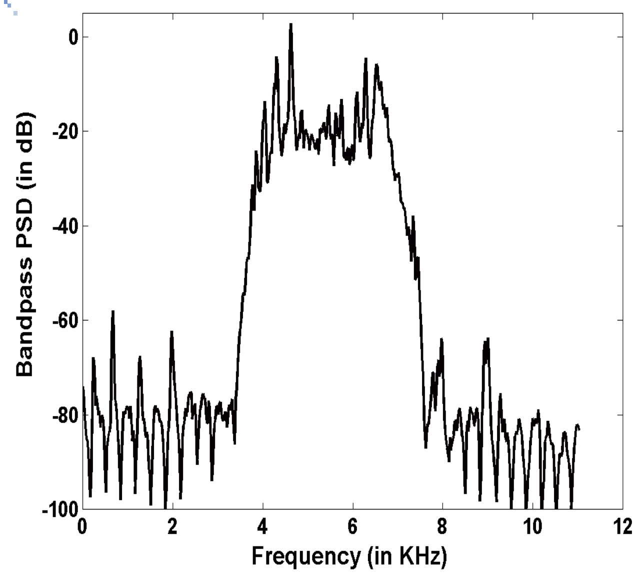
Componentes de alta frequência: reduzidos significativamente.

Transformada de Fourier: Aplicações

Ganho do Filtro e Saída



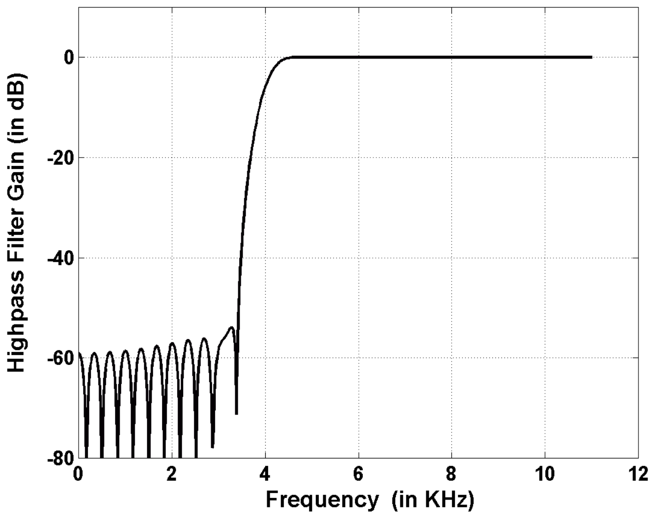
Características de Ganho de Frequência do Filtro Passa Banda



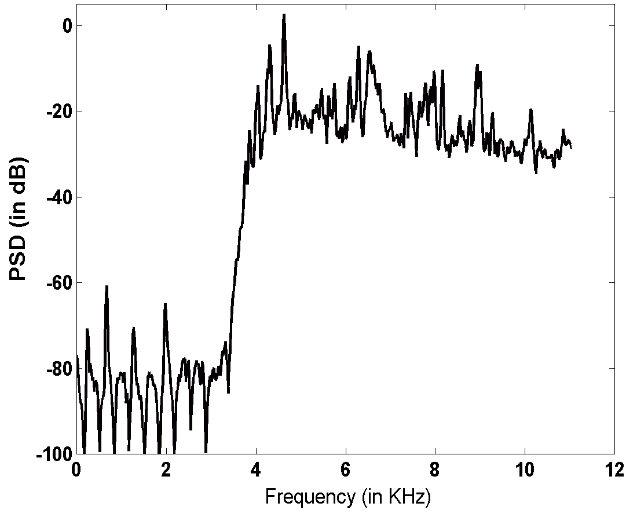
Espectro do sinal filtrado

Transformada de Fourier: Aplicações

Ganho do Filtro e Saída



Características de Ganho de Frequência do filtro Passa Alta



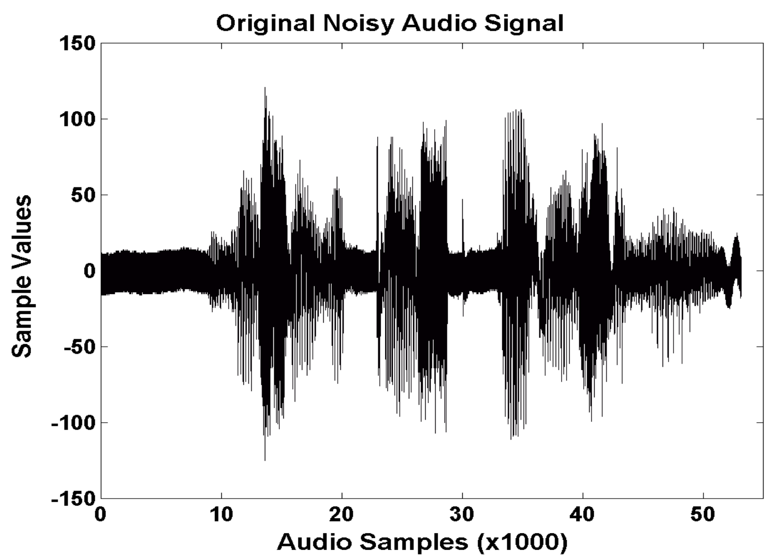
Espectro do sinal de saída

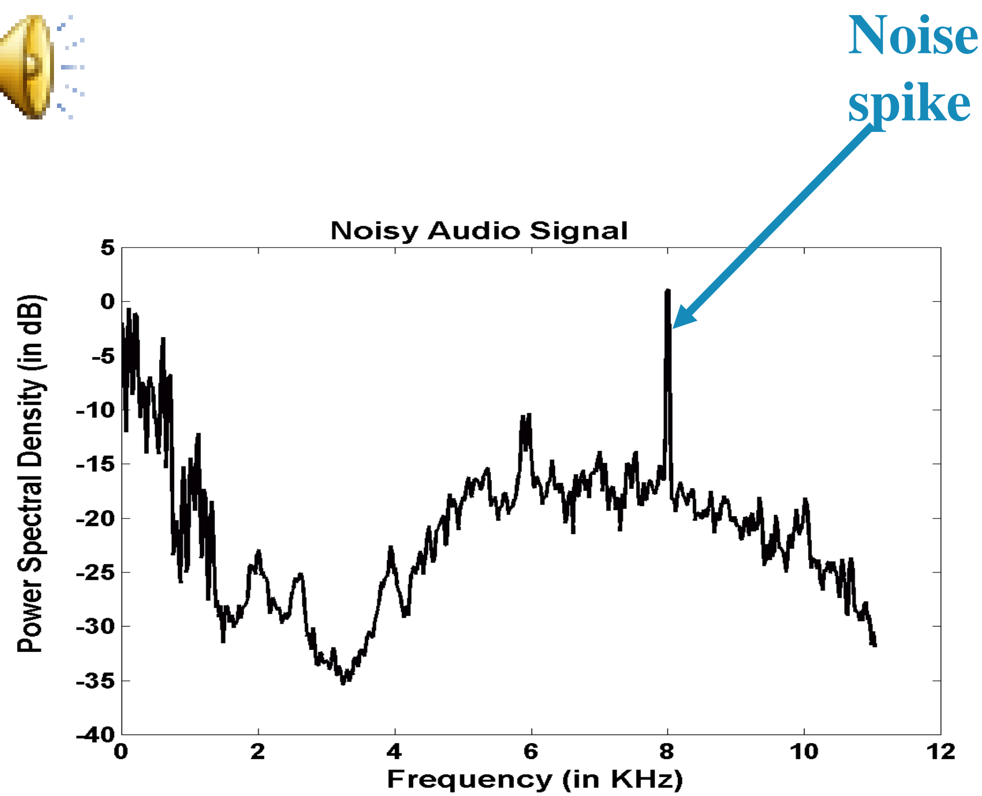
Transformada de Fourier: Aplicações

Comparação dos sons

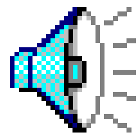
- Som original
- Saída do Filtro Passa-Baixa
- Saída do Filtro Passa-Faixa
- Saída do Filtro Passa-Alta

Transformada de Fourier: Aplicações

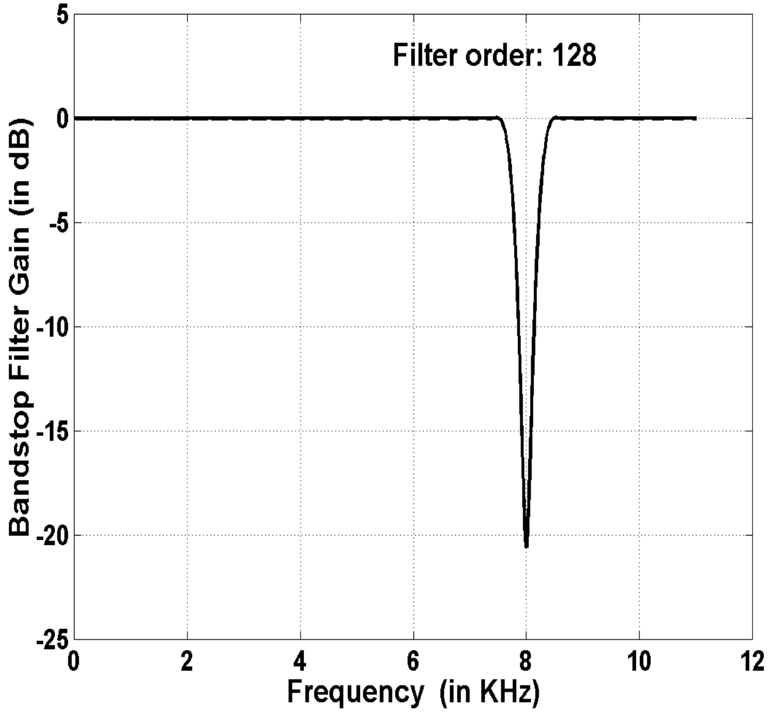




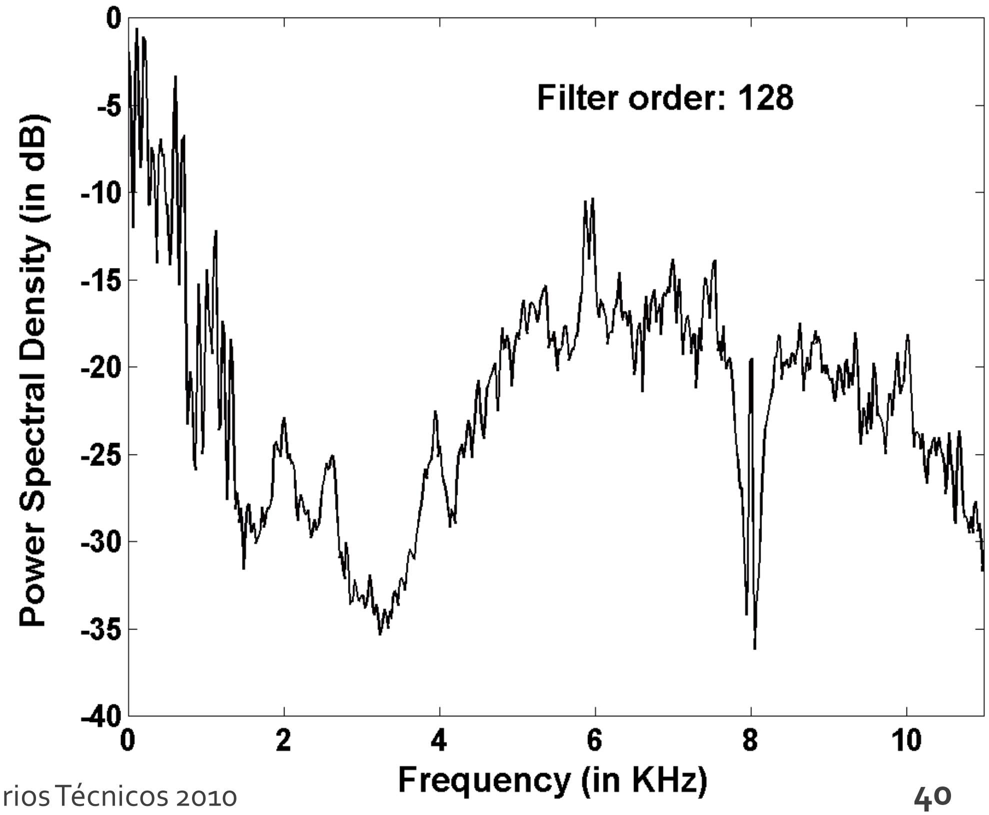
Transformada de Fourier: Aplicações



Ganho de Resposta do Filtro

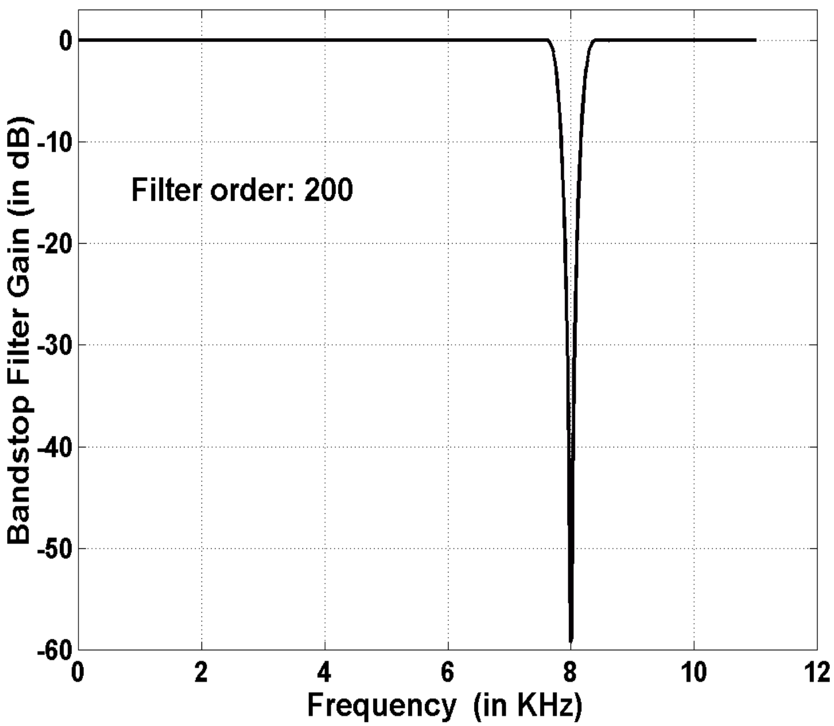


Espectro do sinal filtrado

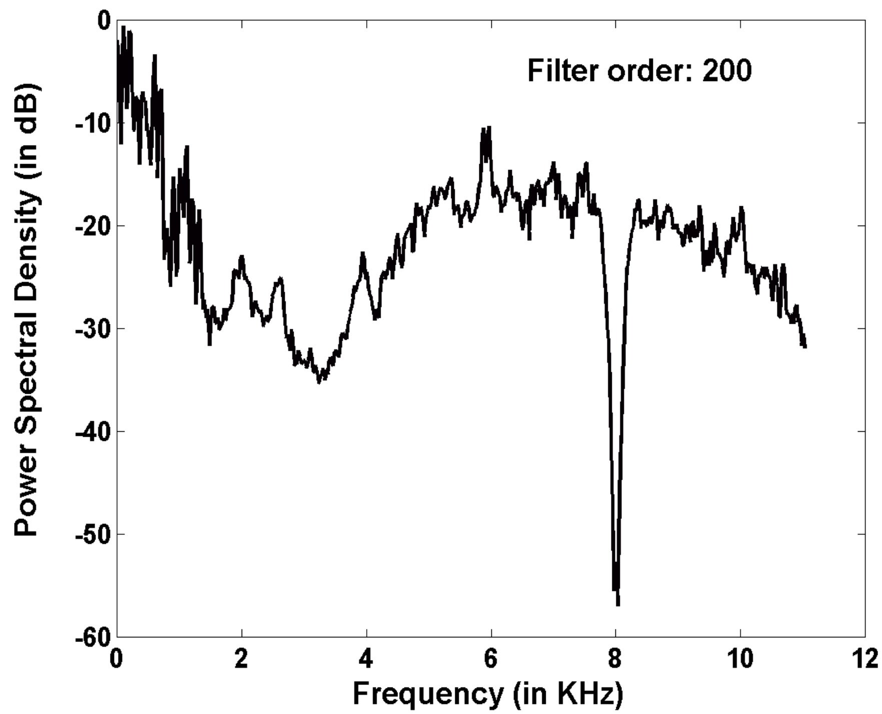


Transformada de Fourier: Aplicações

Ganho de Resposta do Filtro



Espectro do sinal de saída

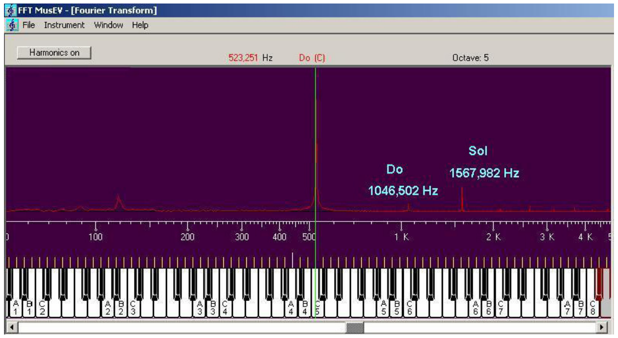


Transformada de Fourier: Aplicações

Transformada de Fourier Unidimensional: Música

- **Análise um som musical**: determinar quais as notas musicais (frequências) que estão sendo executadas em um certo trecho.
  - Afinador de instrumento.

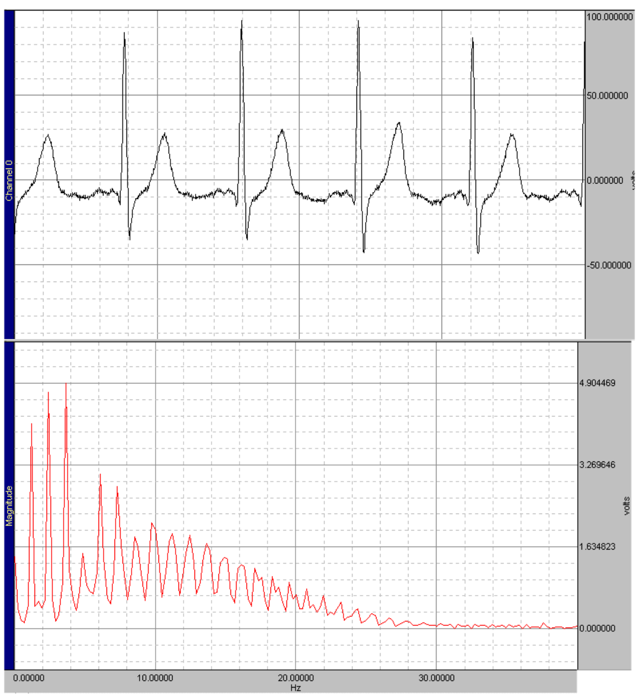
Exemplo: FFT MusEV

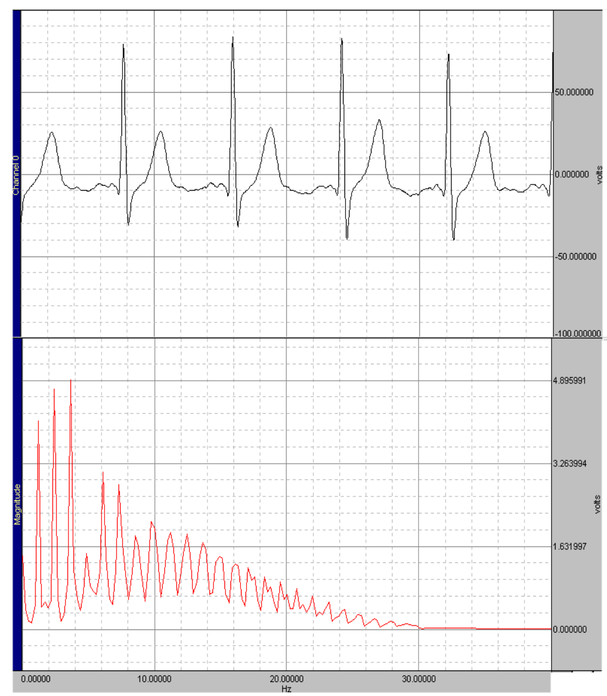


Transformada de Fourier: Aplicações

Transformada de Fourier Unidimensional: Sinais Biológicos

O ECG é realizado numa largura de Banda menor: interesse principal é medir o ritmo, desprezando-se pormenores morfológicos





Transformada de Fourier: Aplicações

Transformada de Fourier Bidimensional: Imagem

- O coeficiente de F(0,0): denota a intensidade média da imagem.
- Coeficientes de baixos índices (freqüências): componentes da imagem que variam pouco.
- Coeficientes de alta freqüência: associados a variações bruscas de intensidade.

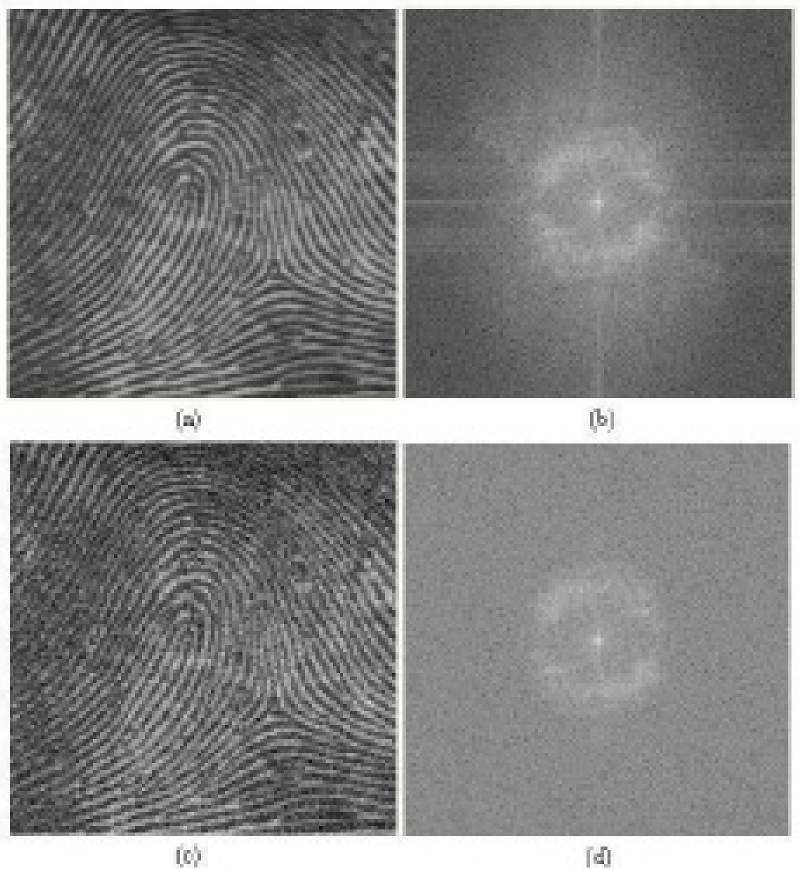
Transformada de Fourier: Aplicações

Transformada de Fourier:

Comparação do espectro
de Fourier de imagens
de impressão digital

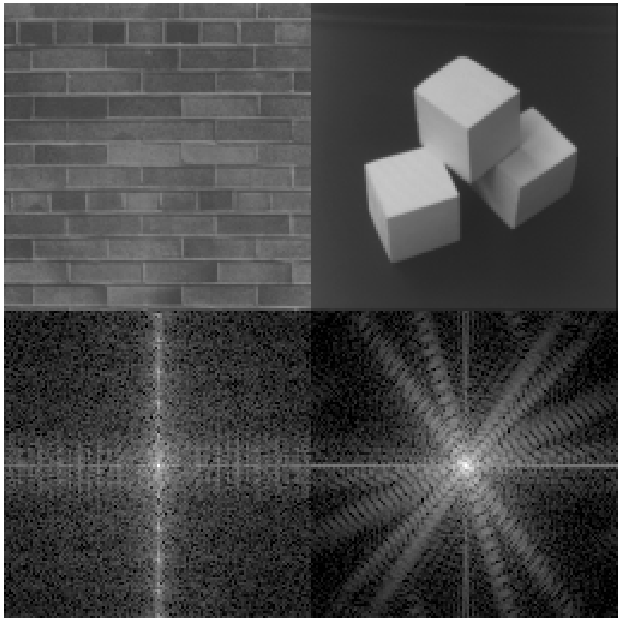
sem ruído (a) (b) e

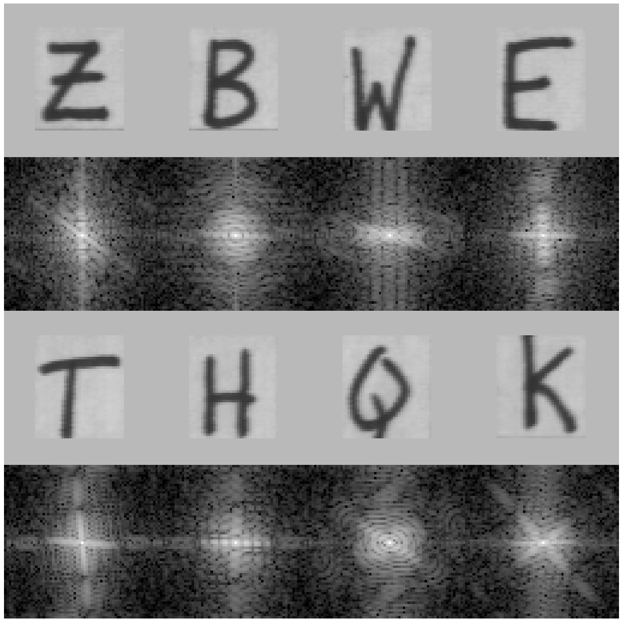
com ruído (c) (d).

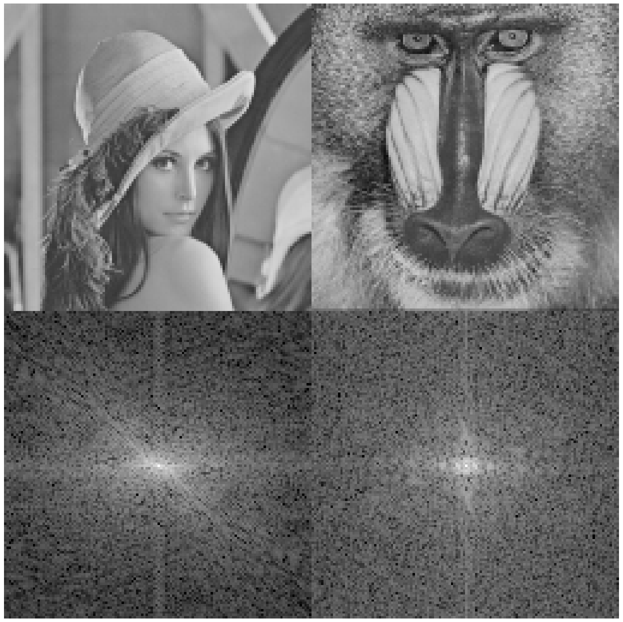


Transformada de Fourier: Aplicações

Transformada de Fourier:







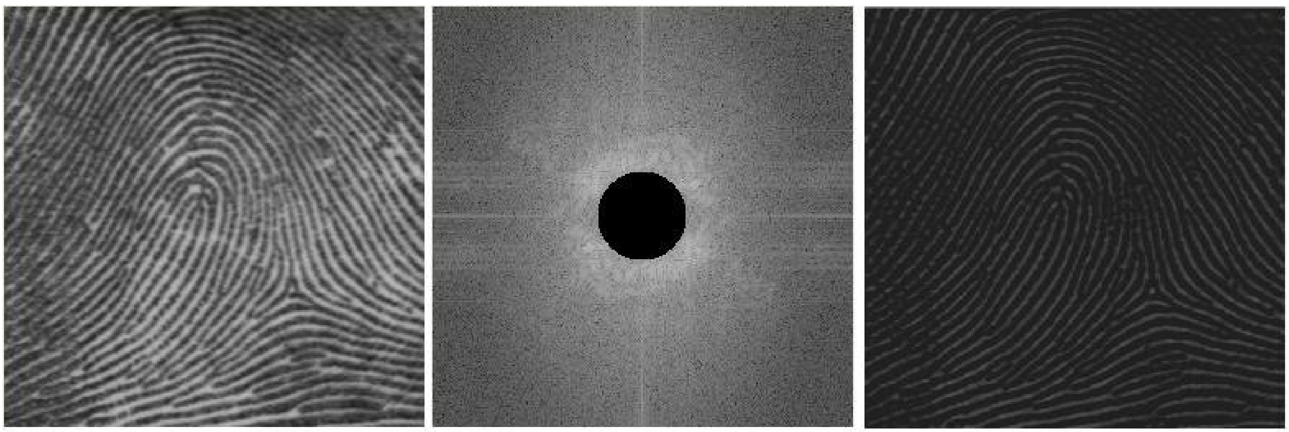
Transformada de Fourier: Aplicações

Transformada de Fourier Bidimensional: Processamento de Imagem

- Filtragem Passa-baixa
- Filtragem Passa-faixa
- Filtragem Passa-alta

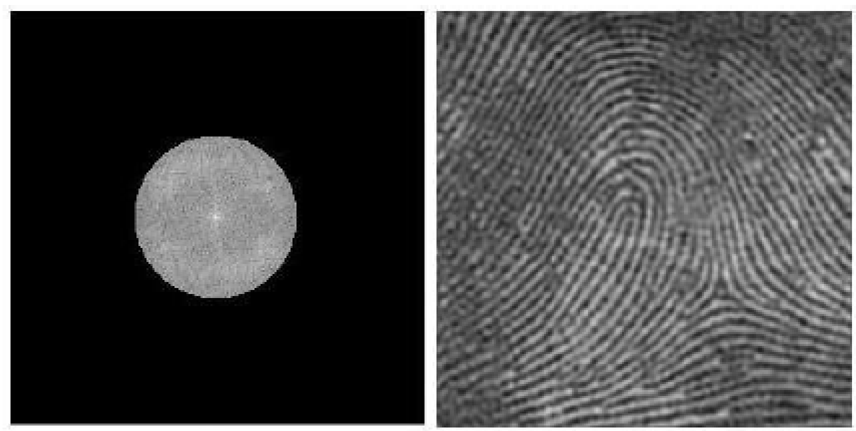
Transformada de Fourier: Aplicações

Filtragem Passa-Alta:



(a) (b) (c)

Filtragem Passa-Baixa:



(a) (b)

Transformada de Fourier: Aplicações

Filtragem:

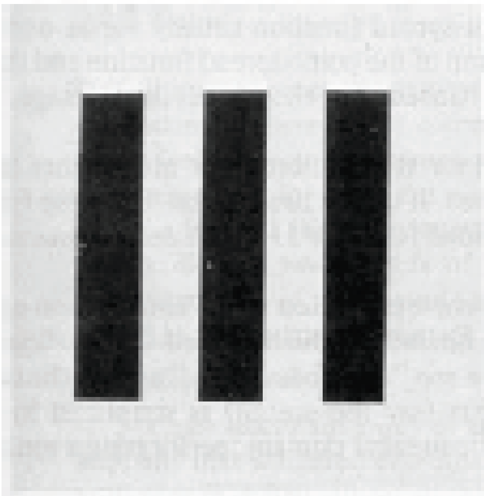


Imagem Original

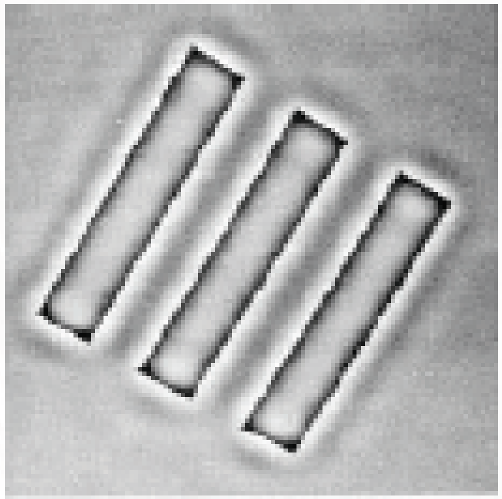


Imagem Filtrada
(Passa-Alta)

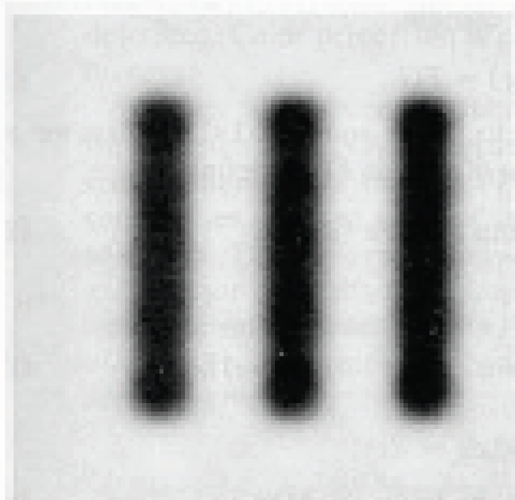


Imagem Filtrada
(Passa-Baixa)

Transformada de Fourier: Aplicações

Filtragem Passa-Baixa (suavização):

Transformada de Fourier: Aplicações

Filtragem (minimização de ruído):

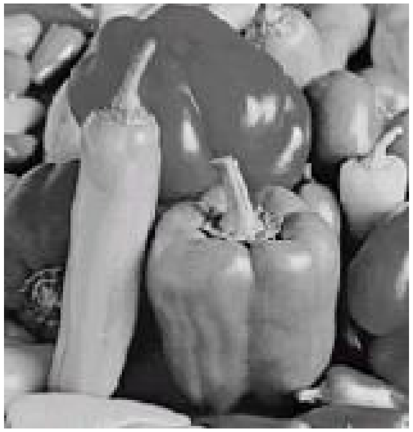


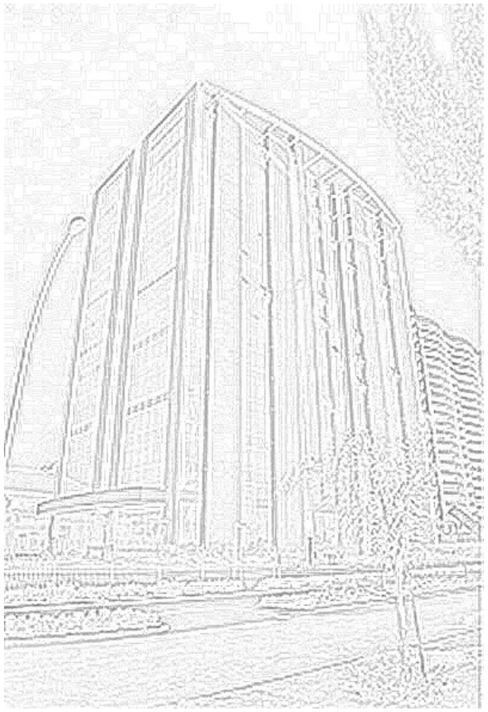
Imagem Original

Imagem com Ruído

Imagem Filtrada

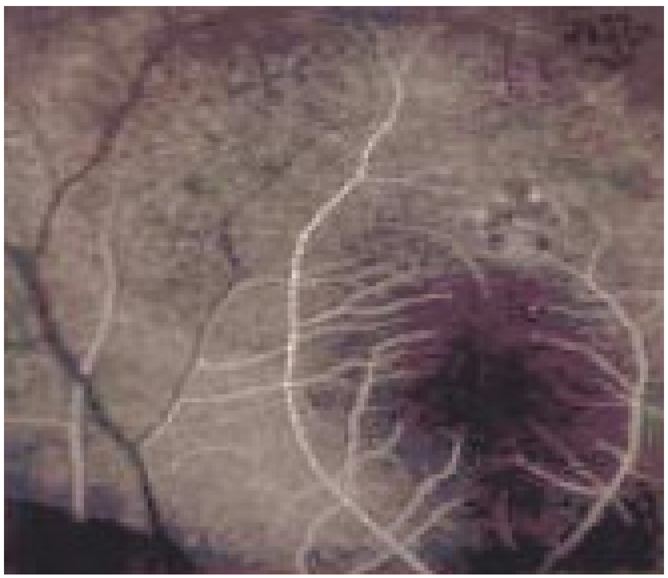
Transformada de Fourier: Aplicações

Filtragem Passa-Alta (realce de contornos, bordas):



Transformada de Fourier: Aplicações

Filtragem Passa-Alta: Imagens Médicas (realce de contornos, bordas):



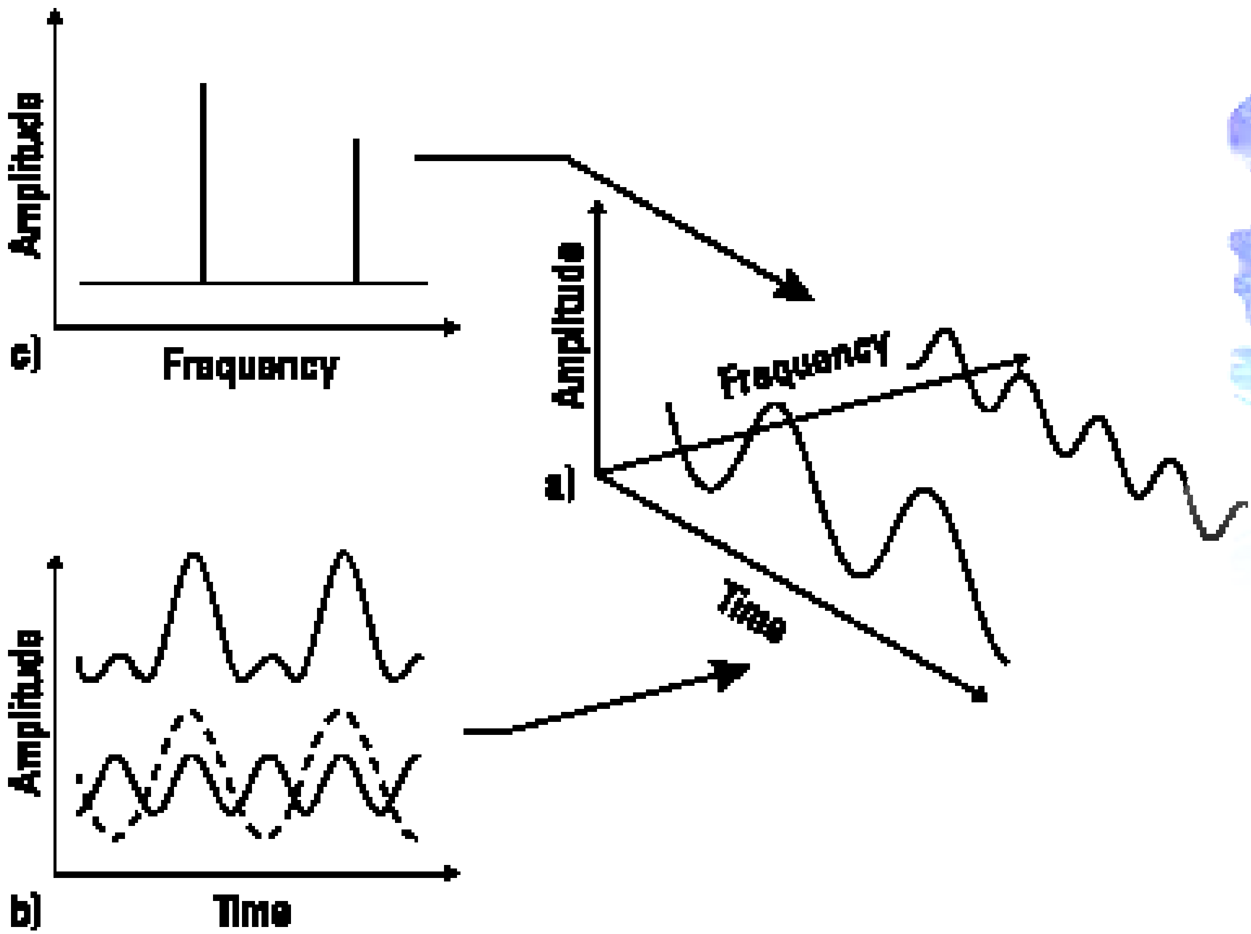
Considerações Finais

- Fenômenos periódicos ocorrem recorrentemente em várias aplicações: representação de funções periódicas em termos de funções simples, como o *senx* ou *cosx* - **Séries de Fourier**.
- Conceitos e técnicas desenvolvidos para as séries de Fourier podem ser estendidos para o caso de funções que não são periódicas: **Transformadas de Fourier**.
- A utilização de séries e transformadas de Fourier revela-se, portanto, eficiente na resolução de problemas nas mais diversas áreas.

Bibliografia

- S. K. Mitra. Digital Signal Processing: A Computer Based Approach. 3a Ed. MacGraw-Hill, 2006.
- Rafael C. Gonzalez & Richard E. Woods. Digital Image Processing. Prentice Hall, 3ª Ed., 2008.
- A.V.Oppenheim, R.W.Shafer and J. R. Buck. Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall, 1999.
- S. K. Mitra. Digital Signal Processing Laboratory Using Matlab. McGraw-Hill, 1999.
- *Pittas H. McClellan e outros*, Digital Image Processing Algorithms and Applications. John Wiley & Sons, 2000.
- J Beutel, H L Kundel, R L van Metter. Handbook of Medical Imaging. Vol. 1: Physics and Psychophysics. SPIE Press, 2000.

Dúvidas?



Amplitude
c)
Frequency
Amplitude
a)
Frequency
Time
Amplitude
b)
Time