

## Teoria dos Grafos

Planaridade de Grafos

Teoria dos Grafos © João F. dos Santos, 2012-2013

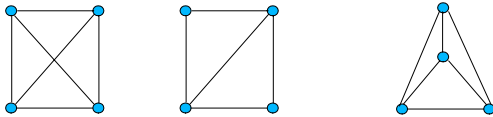
## Planaridade em Grafos

- Estudos de aspectos da topologia de grafos:
  - Grafos planares
  - Coloração de grafos
- Problema das 3 casas/3 serviços
- Problema de coloração de mapas
- Utilidade prática

Teoria dos Grafos © João F. dos Santos, 2012-2013

## Conceitos Básicos

- Grafo planar
- Grafo plano
- $K_4$  é planar?



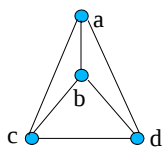
Teoria dos Grafos © João F. dos Santos, 2012-2013

## Conceitos Básicos

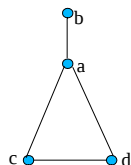
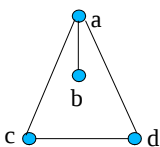
- Um grafo plano divide o plano em várias regiões.
- Uma delas é chamada região externa.
- Cada aresta deve fazer parte da borda de alguma região.

Teoria dos Grafos © João F. dos Santos, 2012-2013

## Conceitos Básicos

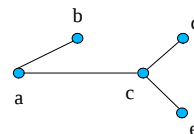


4 regiões:  
R1: ac,cb,ba  
R2: ab, bd,da  
R3: bc, cd, db  
R4: ac, cd,da (externa)



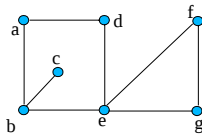
Teoria dos Grafos © João F. dos Santos, 2012-2013

- Uma árvore determina uma única região.
- Toda aresta da árvore é parte da borda desta região.



Teoria dos Grafos © João F. dos Santos, 2012-2013

- Para o grafo plano abaixo indique:
  - Quantidade de regiões.
  - Conjunto de arestas de cada borda.
  - A região externa.



Tema do Curso

© João Francisco dos Santos

## Fórmula de Euler

- Grafos planares x Poliedros.

TEOREMA: Seja  $G$  um grafo plano com  $V$  vértices,  $E$  arestas e  $R$  regiões.  
Então  $V - E + R = 2$ .

Tema do Curso

© João Francisco dos Santos

## Grafos Não-Planares

- $K_{3,3}$  é não-planar.
  - Prova por construção.
  - Prova por indução.
- $K_5$  é não-planar.
  - Prova por construção.

Tema do Curso

© João Francisco dos Santos

TEOREMA: Seja  $G$  um grafo planar com  $V \geq 3$  vértices e  $E$  arestas.  
Então  $E \leq 3V - 6$ .

Tema do Curso

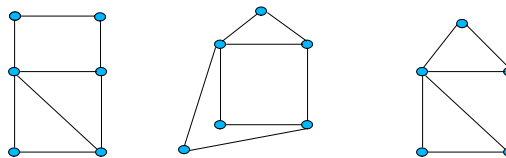
## Teorema de Kuratowski

- Importância do  $K_{3,3}$  e  $K_5$  para descobrir se um grafo é ou não planar.
  - Nenhum grafo que contém um destes grafos como subgrafo não pode ser planar.
  - Nenhum grafo obtido através do  $K_{3,3}$  e  $K_5$  pela simples adição de vértices às arestas não pode ser planar.

Tema do Curso

© João Francisco dos Santos

DEFINIÇÃO: Dois grafos são **homeomórficos** se e somente se se eles podem ser obtidos a partir do mesmo grafo pela adição de vértices (necessariamente de grau 2) às arestas.



Tema do Curso

© João Francisco dos Santos

---

TEOREMA (Kuratowski): Um grafo é planar se e somente se ele não tem subgrafo homeomórfico a  $K_5$  e  $K_{3,3}$ .