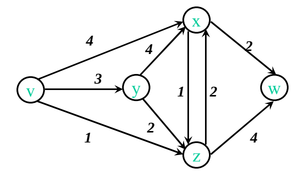
Teoria dos Grafos

Fluxo em Redes

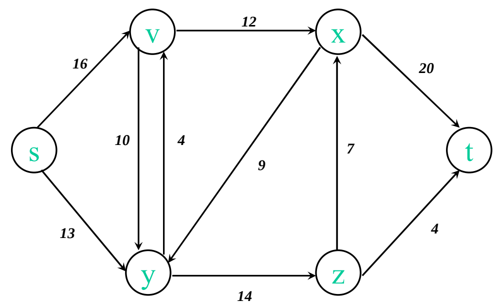
Introdução

- Considere a seguinte situação modelada por um grafo:
  - Cada arco representa uma rua de mão única.
  - O peso de cada arco indica o maior fluxo possível ao longo da rua (veículos/hora).
- Qual o maior número possível de veículos que pode viajar de v a w em uma hora?



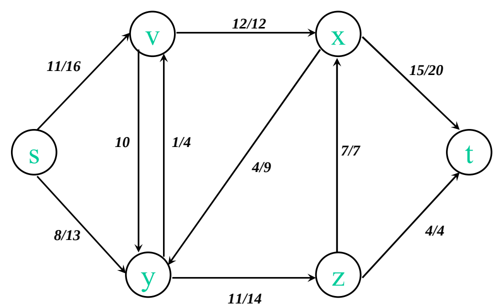
Rede (de fluxo)

- Uma rede (de fluxo) **G = (V, E)** é um grafo dirigido em que cada aresta **(u, v)** $\in$ **E** tem um valor (não-negativo) capacidade **c(u,v)**. Se **(u, v)** $\notin$ **E**, assume-se que **c(u,v) = 0**.
- Uma rede possui dois vértices especiais: fonte e sorvedouro.
- $\forall$**v** $\in$ **V**, assume-se que existe um caminho entre a fonte e sorvedouro que passa por **v**.
- O grafo é, portanto, conectado e **|E|** $\geq$ **|V| - 1** .



Fluxo em Rede

- Sejam um grafo **G = (V, E)**, a função capacidade **c**, uma fonte **s** e um sorvedouro **t**. O fluxo em **G** é uma função **f: V**$\times$**V** $\rightarrow$ **REAIS** que satisfaz às seguintes propriedades:
  1. Restrição de capacidade: $\forall$**u,v** $\in$ **V, f(u,v)** $\leq$ **c(u,v).**
  2. Simetria: $\forall$**u,v** $\in$ **V, f(u,v) = -f(v,u)**.
  3. Conservação do fluxo: $\forall$**u** $\in$ **V – {s, t}**, $\sum_{v \in V}$ **f(u, v) = 0**.
- A quantidade **f(u,v)** (positiva ou negativa) indica o fluxo da rede a partir do vértice **u** até o vértice **v**.
- O fluxo total da rede é **|f| =** $\sum_{v \in V}$ **f(s,v)**.



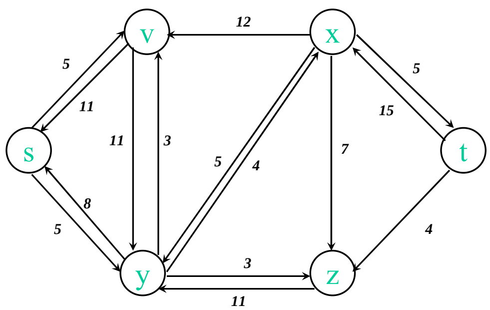
- **|f| = 19**.
- Apenas os fluxos positivos são mostrados.
- Se **f(u,v) > 0**, mostramos **f(u,v)/c(u,v)**. Caso contrário mostramos apenas a capacidade.
- Pode ser generalizado para redes com múltiplas fontes e sorvedouros.
- Um dos problemas é encontrar o fluxo máximo.

Redes Residuais

- Sejam uma rede e um fluxo. Uma rede residual é uma rede com os arcos da rede original que comportam mais fluxo.
- Sejam um grafo **G = (V, E)**, a função capacidade **c**, um fluxo **f**, uma fonte **s** e um sorvedouro **t**:
  - Capacidade residual de **(u,v)**:
    - $c_f(u,v) = c(u,v) – f(u,v)$.
- A rede residual induzida por **f** é $G_f = (V, E_f)$, em que
  - $E_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$.

Teoria dos Grafos © Jorge Figueiredo, DSC/UFCG

Rede Residual (exemplo)



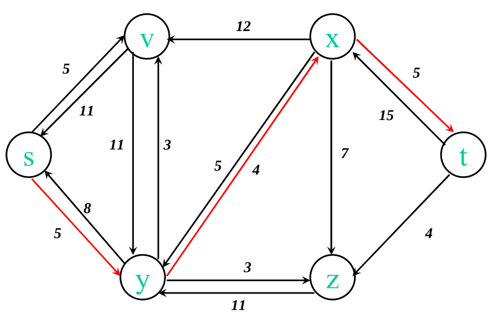
Teoria dos Grafos © Jorge Figueiredo, DSC/UFCG

Caminho Expandível

- Seja uma rede **G = (V, E)** e um fluxo **f** , um caminho expandível p é um caminho de **s** para **t** na rede residual G_f.
- A capacidade residual de um caminho expandível é definida como:
  - $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$.

Teoria dos Grafos © Jorge Figueiredo, DSC/UFCG

Caminho Expandível (exemplo)



Teoria dos Grafos © Jorge Figueiredo, DSC/UFCG

O Método de Ford-Fulkerson

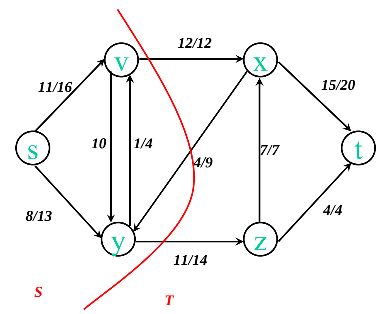
- Como determinar o fluxo máximo?
  - Utilizar os conceitos de grafo residual e caminho expandível.

```
BFS(G, s, t)
for ∀e ∈ E[G]  do
        fluxo[e] ← 0

while exisitr um caminho expandível p do
        aumentar f ao longo de p

return f
```

Teoria dos Grafos © Jorge Figueiredo, DSC/UFCG

Cortes

- Um ***corte*** é uma partição de *V* em *S* e *T* = *V* – *S*, em que *s* ∈ *S* e *t* ∈ *T*
- O ***fluxo da rede*** (*f*(*S*,*T*)) através do corte é a soma dos fluxos *f*(*u*,*v*), em que *u* ∈ *S* e *v* ∈ *T*
- A ***capacidade*** (*c*(*S*,*T*)) do corte é a soma das capacidades *c*(*u*,*v*), em que *u* ∈ *S* e *v* ∈ *T*
- ***Corte mínimo*** – um corte com a menor capacidade
- |*f*|= *f*(*S*,*T*)



Teorema do Fluxo Máximo-Corte Mínimo

- Se *f* é o fluxo de G, as seguintes condições são equivalentes:
  1. *f* é um fluxo máximo de *G*
  2. A rede residual G_f não contém caminhos expandíveis
  3. |*f*| = *c*(*S*,*T*) para algum corte (*S*,*T*) de *G*