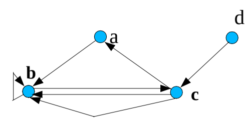
Teoria dos Grafos

Grafos Dirigidos (Digrafos)

Grafos Dirigidos

- Grafos Dirigidos ou Dígrafos:
  - –Conjunto finito não-vazio de vértices.
  - –Conjunto finito de pares ordenados de vértices.
  - –Chamamos de arcos em vez de arestas.
  - –Um arco *(v, w)* é reduzido para *vw*.
  - –*D = (V, A)*

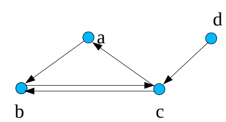


V = {a, b, c, d}
A = {ab, bb, bc, cb, cb, ca, dc}

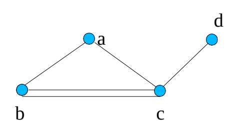
Grafos Dirigidos

- Dígrafo Simples:
  - Todos os arcos são distintos.
  - Não existem auto-laços.
- Para obter o grafo correspondente de um dígrafo:
  - Eliminar as direções dos arcos.
  - Não necessariamente o grafo correspondente a um dígrafo simples é simples.

Exemplo

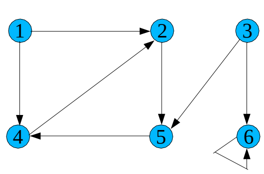


Dígrafo
Simples



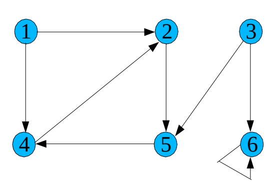
Grafo correspondente.
Não é simples.

Representação por Lista de Adjacência



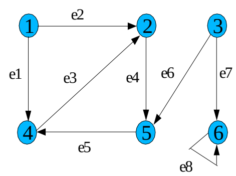
1	2	4
2	5	
3	6	5
4	2	
5	4	
6	6	

Representação por Matriz de Adjacência



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Representação por Matriz de Incidência



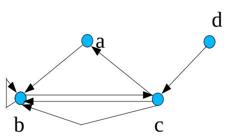
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	-1	-1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1	0
4	-1	0	1	0	-1	0	0	0
5	0	0	0	-1	1	-1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	-1	0

Grau de Vértices

- Os vértices de um dígrafo possuem:
  - Grau de entrada: número de arcos que chegam no vértice. (*indeg(v)*)
  - Grau de saída: número de arcos que partem do vértice. (*outdeg(v)*)
- Da mesma forma:
  - Seqüência de graus de entrada.
  - Seqüência de graus de saída.

Proposição:
Σ indeg(v_i) = Σ outdeg(v_i) = | A|

Exemplo



indeg(a) = 1
outdeg(a) = 1
indeg(b) = 4
outdeg(b) = 2

seqüência indeg = 0, 1, 2, 4
seqüência outdeg = 1, 1, 2, 3

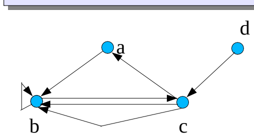
Σ indeg = 0 + 1 + 2 + 4 = 7
Σ outdeg= 1 + 1 + 2 + 3 = 7
|A| = 7

Outros Conceitos

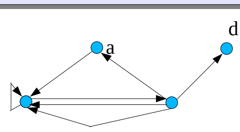
- Dois dígrafos são isomórficos se:
  - Existe um isomorfismo entre os respectivos grafos correspondentes.
  - Preserva a ordem dos vértices em cada arco.
- Os conceitos de passeio, caminho, ciclos, etc. são semelhantes:
  - Deve respeitar a orientação dos arcos.

Exemplo

- *D1* e *D2* não são isomórficos.



D1



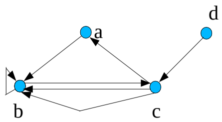
D2

Exemplo de uma trilha: dcbca
Exemplo de um ciclo: cabc

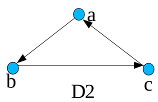
Digrafos Conectados

- Um dígrafo *D* é conectado se:
  - Grafo correspondente é conectado.
- *D* é fortemente conectado se para quaisquer dois vértices *v* e w, existe um caminho entre *v* e *w*.
- *D* é Euleriano se e somente:
  - Fortemente conectado.
  - *indeg(vi)* = *outdeg(vi)*, para todo *i*.

Exemplo



D1 é conectado.
D1 não é fortemente conectado.
D1 não é Euleriano.

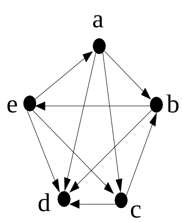


D2 é conectado.
D2 é fortemente conectado.
D1 é Euleriano.

Torneio

- Um torneio é um dígrafo em que para quaisquer 2 vértices distintos *v* e *w*, existe exatamente um arco entre eles: ou *vw* ou *wv*.
- O *score* de um vértice *v* em um torneio é igual a *outdeg(v)*.
- A seqüência de *score* é a seqüência de graus de saída.

Exemplo



Torneio de tamanho 5.
score(a) = 3
score(b) = 2
seqüência de score = 0, 2, 2, 3, 3

Mais Sobre Torneios

- Teorema: todo torneio tem um caminho Hamiltoniano.
- Um torneio é transitivo se e somente se:
  - Sempre que *uv* e *vw* são arcos, *uw* também é.
- É equivalente dizer de um torneio *T*:
  - *T* tem um único caminho Hamiltoniano.
  - *T* é transitivo.
  - Todo jogador (vértice) em *T* tem um score diferente.

Exercício

1. Professor Alencar é muito metódico. Todos os dias pela manhã, ele segue o mesmo ritual para se vestir. Faz parte do seu vestuário: cueca, calça, cinto, camisa, gravata, paletó, meias e sapato, além de um vistoso relógio de pulso. Ele sempre veste a cueca antes de por as meias e a calça. Os sapatos são calçados após o professor ter vestido a cueca, calça e meias. O cinto vai depois da calça e da camisa. O relógio pode ser colocado em qualquer momento. O paletó só é vestido depois do cinto e da gravata que é colocada depois da camisa. Modele a rotina do Professor Alencar usando grafos.

Exercício

2. Considere a figura abaixo que mostra a planta baixa de uma casa. É possível identificar portas que dividem os diversos cômodos da casa e portas que dão acesso à parte externa da casa. Utilize a teoria dos grafos para determinar se é possível começar do lado de fora da casa, entrar na casa e visitar cada cômodo uma única vez (sem deixar a casa) e, finalmente sair da casa. Justifique.