

## Teoria dos Grafos

Coloração em Grafos

Teoria dos Grafos

© João F. dos Santos, 2012-2013

## Coloração em Grafos

- Qual o número mínimo de cores que devemos usar para colorir os estados do mapa do Brasil, com a restrição de que estados vizinhos não podem ter a mesma cor?
  - Relação com o problema de colorir vértices de um grafo.
  - O Teorema das 4 Cores, provado em 1976, se constitui em um dos resultados mais importantes da matemática no Século XX. (permaneceu sem solução desde 1852)
- Aplicação em muitos problemas práticos.

Teoria dos Grafos

© João F. dos Santos, 2012-2013

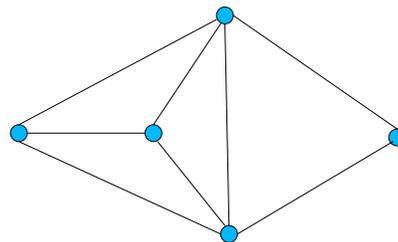
## Coloração em Grafos

- Uma **coloração** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.
- Um grafo  $G$  tem  $k$ -coloração se ele pode ser colorido com  $k$  cores.
- Se  $G$  tem  $k$ -coloração mas não pode ter  $(k-1)$ -coloração:
  - O número cromático de  $G$  é  $k$ .
  - $G$  é  $k$ -cromático.
  - $\chi(G) = k$ .

Teoria dos Grafos

© João F. dos Santos, 2012-2013

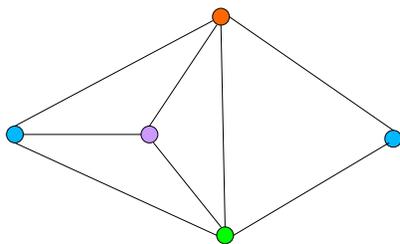
## Coloração em Grafos



Teoria dos Grafos

© João F. dos Santos, 2012-2013

## Coloração em Grafos



Teoria dos Grafos

© João F. dos Santos, 2012-2013

## Alguns Cenários Interessantes

- $\chi(G) = 1$ . O que isso significa?
- $\chi(K_n) = ?$
- $\chi(G) = 2$ . Quando isso ocorre?

Teoria dos Grafos

© João F. dos Santos, 2012-2013

### Alguns Cenários Interessantes

- $\chi(G) = 1$ . Podemos afirmar que o grafo  $G$  não tem arestas.
- $\chi(K_n) = n$ . Isso implica dizer que podemos ter números cromáticos grandes.
- $\chi(G) = 2$ . Se e somente se  $G$  é bipartido. E no caso de uma árvore?

Tiago dos Santos

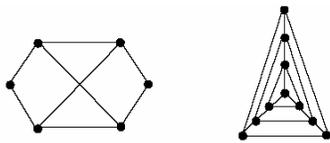
© João Figueiredo, DISC/FCC

### Mais considerações

- Não é possível garantir que tipos de grafos são 3-cromáticos.
- Se um grafo tem  $n$  vértices, seu número cromático não pode ser maior do que  $n$ .
- Se  $K_r$  é subgrafo de um grafo  $G$ , o número cromático não pode ser menor do que  $r$ .

Tiago dos Santos

© João Figueiredo, DISC/FCC



Tiago dos Santos

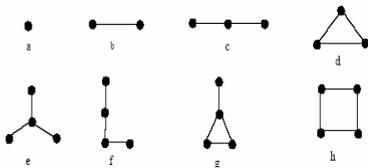
© João Figueiredo, DISC/FCC

### Alguns Teoremas Úteis

- Se  $G$  é um grafo e  $\Delta$  é o maior grau de seus vértices, então  $G$  tem  $(\Delta + 1)$ -coloração.
- Se  $G$  é um grafo conectado que não é completo, e se o maior grau de seus vértices é  $\Delta (\geq 3)$ , então  $G$  tem  $(\Delta)$ -coloração.
- Todo grafo planar pode ter 5-coloração.
- Appel e Haken provaram em 1976 que todo grafo planar admite 4-coloração.
- Como determinar o número cromático de um grafo?

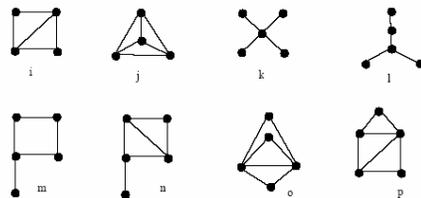
Tiago dos Santos

© João Figueiredo, DISC/FCC



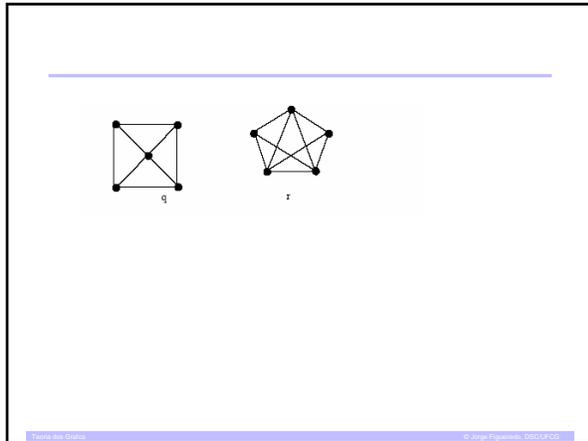
Tiago dos Santos

© João Figueiredo, DISC/FCC



Tiago dos Santos

© João Figueiredo, DISC/FCC



**Exercício 1**

1. Uma companhia manufatura os produtos químicos C1, C2, ... Cn. Alguns destes produtos podem explodir se colocados em contato com outros. Como precaução contra acidentes, a companhia quer construir k armazéns para armazenar os produtos químicos de tal forma que produtos incompatíveis fiquem em armazéns diferentes. Qual é o menor número k de armazéns que devem ser construídos? Como resolver este problema com a ajuda da teoria dos Grafos?

**Exercício 2**

1. Emissoras de televisão vão ser instaladas em estações baseadas em nove cidades de nosso estado (cidades A, B, ..., I). As regulamentações do setor de telecomunicações indicam que uma mesma emissora não pode ser instalada em duas cidades com distância inferior a 150Km. Considere a tabela abaixo que indica as distâncias entre as cidades. Qual o menor número de emissoras para contemplar as nove cidades? Utilize a teoria dos grafos para resolver este problema e justicar a sua resposta.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
B	85								
C	137	165							
D	123	39	205						
E	164	132	117	171					
F	105	75	235	92	201				
G	134	191	252	223	298	177			
H	114	77	113	117	54	147	247		
I	132	174	22	213	138	237	245	120	