Teoria dos Grafos

Representação de Grafos

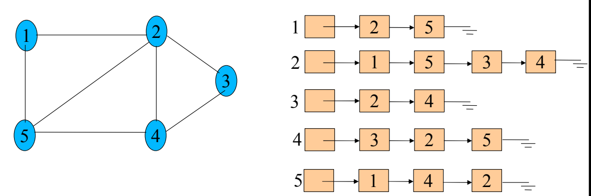
Representação de Grafos

- Representação gráfica:
  - Útil na prática.
  - Não é adequada para representar internamente (em um computador) dados sobre a estrutura de grafos.
- Várias formas de representar um grafo:
  - Listas de Adjacência.
  - Matriz de Adjacência.
  - Matriz de Incidência.

Listas de Adjacência

- *Consiste de um array Adj de |V| listas, um para cada vértice de V.*
- *Para cada u em V, Adj[u] consiste de todos os vértices de G adjacentes a u.*
- *Vértices armazenados de forma arbitrária na lista.*
- *Também pode ser utilizada no caso de grafos dirigidos.*

Exemplo



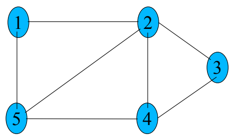
Lista de Adjacência

- Forma compacta de representar grafos esparsos.
- Utilizada com outras tipos de grafos.
- Ineficiente para determinar se *vw* está no grafo.

Matriz de Adjacência

- Requer que os vértices sejam numerados arbitrariamente de $1, 2, ..., |V|$.
- Matriz $A= (a_{ij})$, de ordem $|V| \times |V|$:
  - $a_{ij} = 1$, se $(i, j) \in E$
  - $a_{ij} = 0$, *caso contrário*

Exemplo



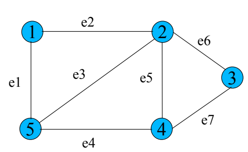
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Matriz de Adjacência

- Preferível em grafos pequenos.
- Requer apenas um bit por entrada.
- Válido também com outros tipos de grafos. Exemplo: grafos ponderados.
- $O(V^2)$.

Matriz de Incidência

- Matriz B= (b_{ij}), de ordem $|V| \times |E|$:
  - $b_{ij} = 1$, se vértice v_i e aresta e_j forem incidentes
  - $b_{ij} = 0$, *caso contrário*



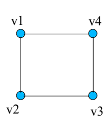
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	1	1	0
3	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	1	0	1
5	1	0	1	1	0	0	0

Verificando Isomorfismo

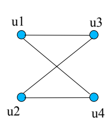
- Sejam A_1 e A_2 as matrizes de adjacência de G_1 e G_2. Se G_1 e G_2 são isomórficos:
  - $PA_2P^T = A_1$
  - P é uma matriz de permutação.

Teorema: Dois Grafos são isomórficos sss seus vértices podem ser rotulados de tal forma que as correspondentes matrizes de adjacências são iguais.

Exemplo



G1



G2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Se fizermos: $u_1 \rightarrow v_1$; $u_2 \rightarrow v_3$; $u_3 \rightarrow v_4$; $u_4 \rightarrow v_2$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Dois Grafos rotulados G_1 e G_2, com respectivas matrizes A_1 e A_2, são isomórficos sss $A_2 = PA_1P^T$, para alguma matriz de permutação P.

Exercício

1. Você e seu amigo retornam das férias e são recebidos no aeroporto pelas mães e por duas irmãs do seu amigo. Após troca de abraços, cada uma das (outras) cinco pessoas lhe fala o número de abraços que deu. Curiosamente, todos os números são diferentes. Assumindo que:
   - Você e seu amigo não se abraçaram.
   - A mãe de vocês não se abraçaram.
   - As irmãs não se abraçaram.
   - Duas mesmas pessoas se abraçaram, no máximo, uma vez.

Responda:

1. Quantas pessoas você abraçou?
2. Quantas pessoas seu amigo abraçou?