Teoria dos Grafos

Caminhos e Conectividade de Grafos

Exemplos de Aplicação de Grafos

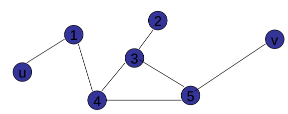
- Planejamento eficiente de roteamento de pacotes na Internet.
- Definir melhor rota de distribuição de correspondência nos postos de distribuição da ECT.
- Determinar se uma mensagem pode ser trocada por dois computadores em uma rede (possivelmente usando links intermediários)

Idéia básica: determinar alcançabilidade entre os vértices através de caminhamento em arestas.

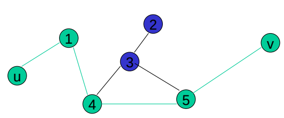
Passeio (walk)

- Um passeio em um grafo $G= (V, E)$ é uma seqüência alternada de vértices e arestas que começa e termina com vértices.
- A seqüência $v_1, \ldots, v_k$, $\forall\, v_1, \ldots, v_k \in V$, é um passeio de v_1 a v_k, se $(v_j, v_{j+1}) \in E$, $1 \leq j \leq |k - 1|$.
- Um passeio com k vértices possui k – 1 arestas.
  - Neste caso teríamos as seguintes arestas: (v_1, v_2), (v_2, v_3), …, (v_{k-1}, v_k)
- O comprimento de um passeio é o número de arestas do passeio.

Passeio (walk)

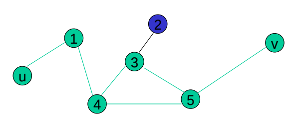


Passeio (walk)



Passeio: a seqüência u, 1, 4, 5, v

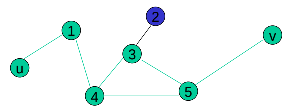
Passeio (walk)



O que dizer da seqüência u, 1, 4, 3, 5, 4, 3, 5, v ?

Caminho (Path)

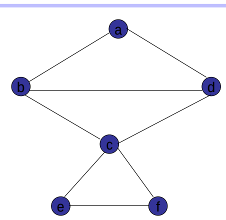
- Um caminho ou caminho simples em um grafo é um passeio em que todos os seus vértices são distintos.



O passeio u, 1, 4, 3, 5, 4, 3, 5, v não constitui um caminho.

Trilha (Trail), Circuito e Ciclo

- Uma trilha ou trajeto em um grafo é um passeio em que todas as suas arestas são distintas.
- Um trajeto fechado ou circuito em um grafo é um trajeto em que o vértice inicial e o vértice final são iguais.
- Um cricuito em que todos os vértices são distintos (com exceção do primeiro e do último) é chamado de ciclo.
- Um grafo acíclico é aquele que não possui ciclos.
- Um triângulo é um ciclo de tamanho 3.



Forneça exemplos de:
- Passeio que não é nem trilha nem caminho.
- Passeio que é trilha e não é caminho.
- Passeio fechado que não é circuito.
- Circuito que não é ciclo.
- Triângulo.

Grafos Conectados (ou Conexos)

- Um grafo é conectado se e somente se existe um caminho entre qualquer par de vértices do grafo.
- Um componente de um grafo é um subgrafo conectado maximal.
- Um grafo com apenas um componente é um grafo conectado.

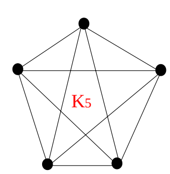
Grafo Euleriano

- Um grafo conectado G é dito Euleriano se existe uma trilha fechada contendo cada uma das arestas de G.
- O problema das pontes (lembram da primeira aula?) é equivalente a identificar se o grafo correspondente é Euleriano.

Teorema: Um Grafo Conectado G é Euleriano se e somente se o grau de cada vértice é par.

Grafo Euleriano

- O K_5 é Euleriano?



Grafo Hamiltoniano

- Um Grafo Hamiltoniano é um grafo que contém uma trilha fechada, passando exatamente uma única vez em cada um dos vértices.

Teorema (Ore, 1960): Se G é um grafo com n (≥3) vértices, e se deg(v) + deg(w) ≥ n para cada par de vértices não-adjacentes v e w, então G é Hamiltoniano.

Exercício

1. Um grafo G = (V, E) é conexo se e somente se possui um vértice v ∈ V, tal que para cada vértice w ∈ V existe um caminho de w a v. Justifique.
2. Prove que todo grafo conexo com n vértices tem pelo menos n - 1 arestas.