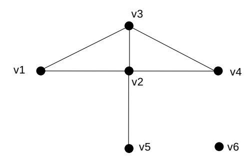
Teoria dos Grafos

Definições e Conceitos Básicos

Definições

- Dois tipos de elementos:
  - Vértices ou nós.
  - Arestas.



Grafo Simples

G = (V, E)

V é um conjunto finito não-vazio de vértices.

E é um conjunto finito de arestas.

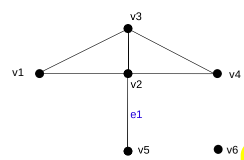
Se *e Є E, é um conjunto da forma:*

e = { v, w} = vw = wv, onde v,w Є V.

e é *incidente* a *v* e *w.*

v e *w* são *adjacentes* ou *vizinhos.*

Grafo Simples



V = {v1, v2, v3, v4, v5, v6}

E = {v1v2, v1v3, v2v3, v2v4, v2v5, v3v4}

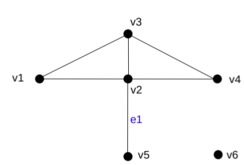
e1 é incidente a v2 e v5

v1, v3, v4 e v5 são adjacentes a v2

Graus de Vértices

- Grau de um vértice *v* (*deg(v)*) é o número de arestas que incidem em *v*.
  - Vértice ímpar.
  - Vértice par.
  - Vértice isolado.
- Um grafo é regular (k-regular) se todos os seus vértices tem o mesmo grau (k).
- Seqüência de graus de um grafo consiste em escrever em ordem crescente os graus de seus vértices.

Graus de Vértices



v6 é um vértice isolado. deg(v6) = 0

v2 é um vértice par. deg(v2) = 4

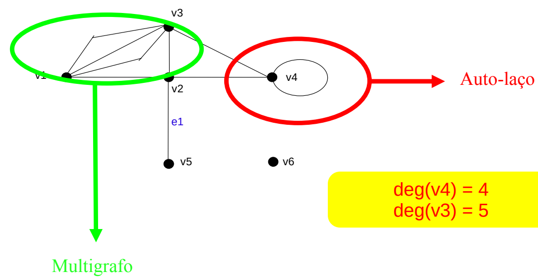
v5 é um vértice ímpar. deg(v5) = 1

Seqüência de graus = 0, 1, 2, 2, 3, 4

Outros Tipos de Grafos

- Pseudo-grafos:
  - Multigrafos.
  - Grafos com auto-laços.
- Grafos dirigidos.
- Não existe terminologia padronizada.

Vamos usar o termo grafo para representar grafos finitos, não dirigidos, com auto-laços e múltiplas arestas.



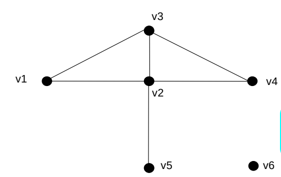
deg(v4) = 4
deg(v3) = 5

Proposições Importantes

- •A partir do conceito de adjacência e graus de vértices.
- •Prova é intuitiva.
- •Como conseqüência: número de vértices ímpares é par.

Proposição de Euler:

$$\sum_{i=1}^{n} deg(vi) = 2|E|$$



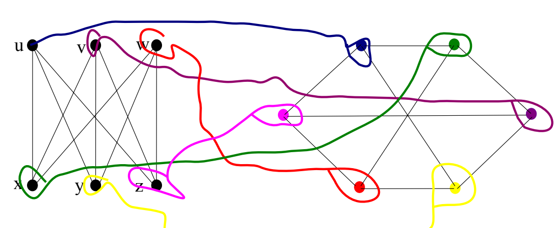
№ de vértices ímpares = 2 = v3 e v5

Σ deg(v_i) = 2 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 12 = 2 x 6

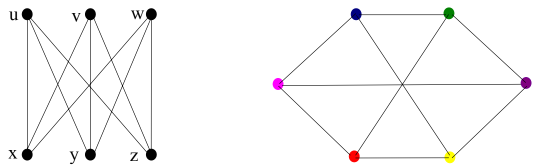
Isomorfismo de Grafos

- Dois grafos são isomórficos:
  - São essencialmente iguais.
  - Correspondência entre os vértices e arestas.
- Sejam *G1= (V1, E1)* e *G2 = (V2, E2)*:
  - *G1 ≈ G2, se existir uma bijeção f: V1 → V2:*
    - *Se vw é uma aresta de E1, então f(v)f(w) é aresta de E2.*
    - *Toda aresta em E2 tem a forma de f(v)f(w) para alguma aresta vw ϵE1.*

Isomorfismo de Grafos



Isomorfismo de Grafos



f(u) = azul, f(v) = roxo, f(w) = vermelho
f(x) = verde, f(y) = amarelo, f(z) = rosa

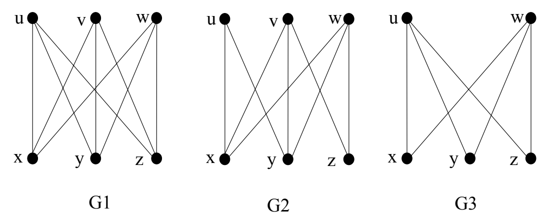
Isomorfismo de Grafos

- Isomorfismo preserva:
  - Simetria: *G1 ≈ G2 ↔ G2 ≈ G1*.
  - *Reflexividade: G ≈ G.*
  - *Transitividade: G1 ≈ G2* e *G2 ≈ G3 → G1 ≈ G3*.
- *Proposições válidas se G1 ≈ G2:*
  - *G1 e G2 têm o mesmo número de vértices.*
  - *G1 e G2 têm a mesma seqüência de graus.*
  - *G1 e G2 têm o mesmo número de arestas.*

Subgrafos

- *G1 = (V1, E1)* é subgrafo de *G2 = (V2, E2)* sss:
  - *V1* é subconjunto de *V2*; e,
  - *E1* é subconjunto de *E2*.
- Subgrafos podem ser obtidos através da remoção de arestas e vértices.

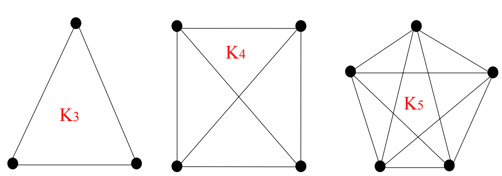
Subgrafos



G2 = G1 \ {uz}
G3 = G1 \ {v}

Grafos Completos e nulos

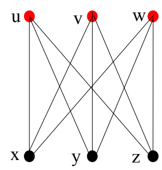
- Grafo nulo é aquele em que *E = Ø*.
- Um grafo simples é completo se qualquer par de vértices distintos é adjacente.
  - Grafo completo de n vértices é dito K_n.



Grafos Bipartidos

- Grafo bipartido é aquele em que *V* pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos não vazios *V1* e *V2*.
  - Cada aresta conecta um vértice de *V1* e um vértice de *V2*.
- Grafo bipartido completo: cada um dos elementos de *V1* é adjacente a cada um dos elementos de *V2*.

Grafos Bipartidos

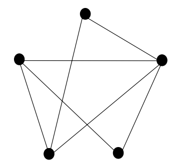


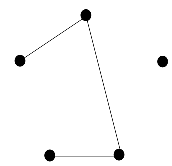
$K_{3,3}$

V1 = {u, v, w}
V2 = {x, y, z}

Complemento de um Grafo

- Seja G um grafo simples:
  - $\underline{G}$ é complemento de G se:
    - $\underline{V} = V$; e,
    - Dois vértices são adjacentes em $\underline{G}$ se e somente se eles não são adjacentes em G.





Exercício

1. Considere as 8 primeiras letras do seu nome. Construa um grafo em que:

- Toda vogal é adjacente a toda consoante.
- Nenhuma vogal é adjacente a outra vogal.
- Nenhum consoante é adjacente a outra consoante.

a) Defina formalmente esse grafo.
b) Determine o complemento desse grafo.
c) É um grafo bipartido? Justifique.