Teoria dos Grafos – Período 2003.2
Conectividade

Jorge César Abrantes de Figueiredo

27/11/2003

1 Conectividade – Conceitos Básicos

A aplicação prática da teoria dos grafos está relacionada com a possibilidade de caminhar, visitar e/ou definir conectividade entre vértices e arestas. Conceitos como passeio, caminho, percurso, ciclo e circuito são importantes e ajudam a responder muitas questões sobre grafos.

Passeio Um *passeio (=walk)* em um grafo é uma seqüência alternada de vértices e arestas que começam e terminam com um vértice. A seqüência $v_1, ..., v_k, \forall v_1, ..., v_k \in V$ é um passeio de v_1 a v_k, se $(v_j, v_{j+1} \in E, 1 \leq j \leq |k-1|$. É fácil observar que um passeio com k vértices possui $k-1$ arestas. Neste caso teríamos as seguintes arestas: $(v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{k-1}, v_k)$.

Comprimento de um Passeio O número de arestas define o comprimento ou tamanho do passeio. No caso de grafos ponderados ou valorados, a definição de comprimento leva em consideração os pesos ou custos associados as arestas.

Caminho ou Caminho Simples (path) Um passeio em que todos os seus vértices são distintos é conhecido como *caminho* ou *caminho simples*.

Trilha ou Trajeto, Circuito e Ciclo Uma *trilha ou trajeto (=trail)* é um passeio em que todas as arestas são distintas. Se o vértice inicial de um trajeto é igual ao último vértice, o trajeto é dito fechado. Um trajeto fechado é também conhecido como *circuito*. Um circuito em que todos os vértices são distintos, com exceção do primeiro e do último, é chamado de *ciclo*. Um grafo acíclico é aquele que não possui ciclos. Um ciclo de tamanho 3 é dito *triângulo*.

É importante lembrar que alguns autores, em português, traduzem de forma diferente os termos walk, path e trail.

Considere a Figura 1. **abcefcbd** é um passeio que não é nem trilha nem caminho. **abcefcd** é uma trilha e não é caminho. **abcefcdba** é um passeio fechado mas, não é um circuito. **bcefcdb** é um circuito que não é ciclo. **bcdb** é um triângulo.

Grafo Conectado Um grafo é dito conectado se e somente se existe um caminho entre qualquer par de vértices do grafo.

Componente Um *componente* de um grafo é um subgrafo conectado maximal. Um grafo com apenas um componente é um grafo conectado.

Teorema: Se G é um grafo bipartido, então cada ciclo de G tem tamanho par.

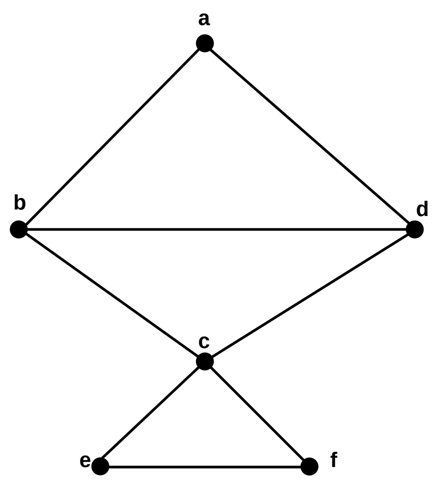

Figura 1: Exemplo de um grafo simples

2 Grafos Eulerianos

Um grafo conectado G é *Euleriano* se existe uma trilha fechada contendo cada uma das arestas de G. Vale a pena destacar que o nome desse tipo de grafo é em homenagem a Leonhard Euler, o matemático que resolveu o problema das Pontes de Königsberg. De fato, o problema das pontes é equivalente a identificar se o correspondente grafo é Euleriano.

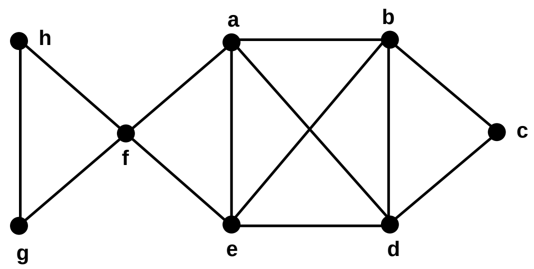

Figura 2: Exemplo de um grafo Euleriano

O grafo da Figura 2 é um grafo Euleriano.
Teorema: Um grafo conectado G é Euleriano se e somente se o grau de cada vértice é par.

3 Grafos Hamiltonianos

Um *Grafo Hamiltoniano* é um grafo que contém uma trilha fechada, passando exatamente uma única vez em cada um dos vértices.

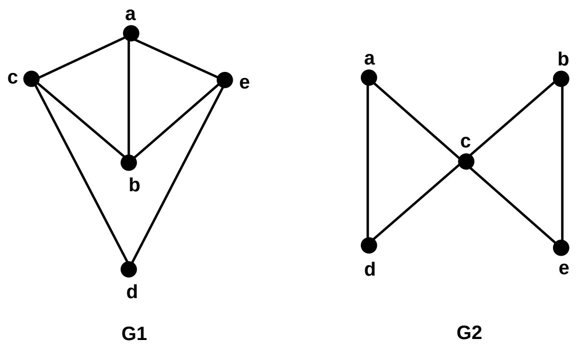

Figura 3: G1 é Hamiltoniano; G2 não.

Na Figura 3, $G1$ é um grafo hamiltoniano. $G2$, por sua vez, não é.

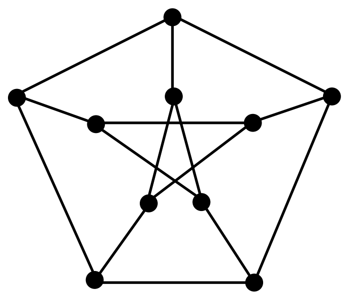

Figura 4: Grafo de Petersen

A Figura 4 mostra o grafo de Petersen. Esse grafo não é Hamiltoniano.

Podemos determinar precisamente se um grafo é Euleriano ou não. O Teorema de Euler não deixa margem para dúvidas. Para decidir se um grafo é Hamiltoniano, não existe nenhum teorema que nos ajude. Existem, entretanto, algumas propriedades que podem ser úteis.

Propriedades de Ciclos

Suponha que H é um ciclo em um grafo G:

1. Para cada vértice v de H, precisamente duas arestas incidentes a v fazem parte de H. Logo, se H é um ciclo Hamiltoniano e o vértice v tem grau 2, as duas arestas incidentes a v devem fazer parte de H.

2. O único ciclo contido em H é ele próprio.