Teoria dos Grafos – Período 2003.2
Introdução Informal à Teoria dos Grafos

Jorge César Abrantes de Figueiredo

13/11/2003

1 Introdução Informal ao Estudo da Teoria dos Grafos

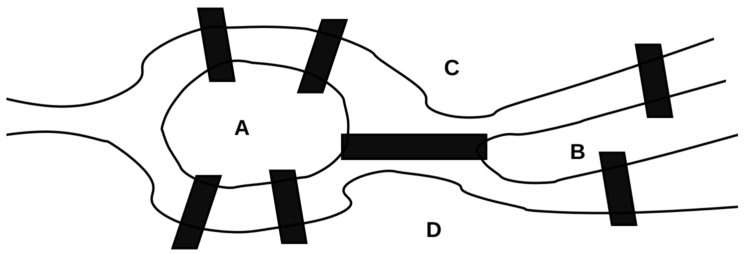
A Teoria dos Grafos é uma importante ferramenta matemática com ampla aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento. Podemos utilizar grafos na engenharia elétrica, geografia, sociologia, arquitetura e ciência da computação, por exemplo.

Na ciência da computação, grafos podem ser vistos como estruturas de dados bastante utilizadas para resolver vários problemas. O entendimento e a aplicação dos conceitos básicos, dos algoritmos e dos diversos problemas clássicos da teoria dos grafos são de fundamental importância na área. Existem centenas de problemas computacionais interessantes que utilizam a teoria dos grafos para defini-los e/ou resolvê-los.

1.1 As Pontes de Königsberg

O *Problema das Pontes de Königsberg* que foi resolvido em 1736 pelo matemático Léonhard Euler é considerado um marco no desenvolvimento da teoria dos grafos. De fato, Euler desempenhou um papel importante nos estudos sobre grafos. Como veremos mais adiante em nosso curso, existem grafos especiais que são chamados de grafos eulerianos, em sua homenagem.

Königsberg, Capital da Prússia, era banhado pelo Rio Pregel. Com as fortes chuvas, o Rio Pregel inundou a cidade e se dividiu em dois braços, formando 4 ilhas como mostrado na Figura abaixo. Sete pontes foram construídas para permitir que as pessoas pudessem passar de uma ilha para a outra. A Figura mostra as sete pontes ligando as ilhas **A**, **B**, **C** e **D**. Os moradores locais ficaram questionando se seria possível começando em uma das ilhas, caminhar exatamente uma única vez sobre cada ponte e retornar ao ponto (ilha) de partida.

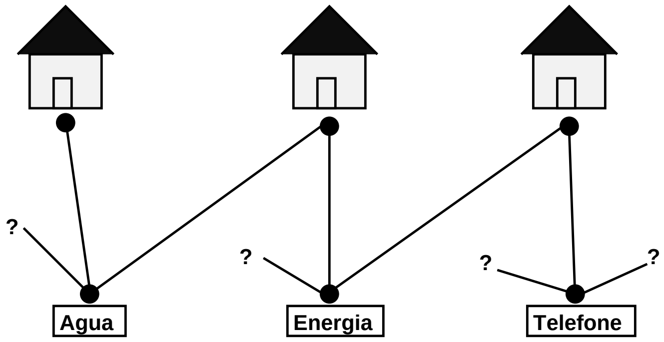


Como Euler estava de passagem na cidade, seria necessário uma forma de definir um modelo que pudesse representar o problema das pontes. O modelo deveria ser simples, abstraindo detalhes irrelevantes que não ajudam na solução do problema. Saber a dimensão de cada ilha, por exemplo.

Euler generalizou o problema através de um modelo de grafos e mostrou que não existe o trajeto que permia sair de uma das ilhas, atravessar todas as pontes uma única vez e, retornar ao ponto inicial. Através do estudo do modelo de grafos, Euler provou que o trajeto só existe se cada uma das ilhas possuir um número par de pontes. A solução deste problema é considerado o primeiro teorema da teoria dos grafos.

1.2 O Problema das Três Casas

O *problema das três casas* é um problema que já deve ser conhecido por alguns de vocês. Suponha que existam três casas e que cada uma delas deva ser conectada a três serviços básicos: telefone, água e eletricidade. A Figura abaixo ilustra o problema em questão. A conexão dos serviços deve ser feita com uma tubulação subterrânea. É possível fazer todas as conexões sem haver cruzamento de tubulação?

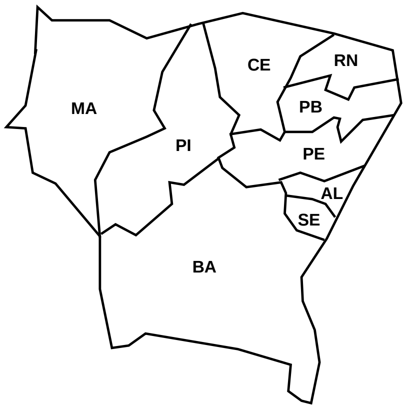


Qual a melhor forma de resolver esse problema? Seria racional testar todas as possibilidades no problema real? De fato, nos deparamos novamente com a necessidade de abstração e construção de um modelo para resolver o problema. É de fundamental importância saber as cores de cada uma das casas?

Esse problema pode ser modelado por grafos e sua solução pode ser obtida verificando se o grafo é planar. Planaridade de grafos é um tópico que será investigado em detalhes mais adiante. Através do estudo de planaridade de grafos é possível determinar que a resposta do nosso problema é *não*.

1.3 O Problema da Coloração de Mapas

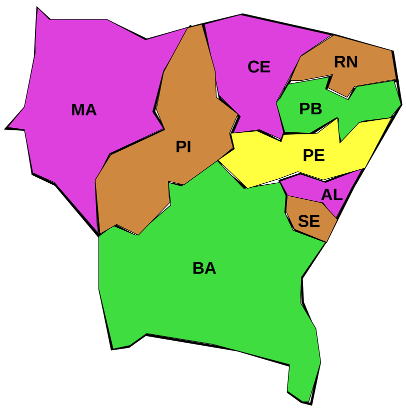
Considere o mapa da Região Nordeste como mostrado na Figura abaixo. Com quantas cores distintas é possível pintar os estados nordestinos, fazendo com que nenhum estado tem a mesma cor de um de seus vizinhos.



Esse problema conhecido como coloração de mapas pode ser generalizado para mapas arbitrários. Consiste em determinar o menor número de cores que pode ser usado para colorir um mapa, de modo que nenhum par de estados adjacentes possua a mesma cor. Se considerarmos mapas pequenos, como é o caso do mapa da Região Nordeste, é possível testar várias possibilidades e encontrar uma resposta. Se considerarmos mapas maiores, talvez tenhamos mais dificuldades em encontrar a solução.

Este problema também pode ser modelado por um grafo. O *Teorema das 4 cores*, garante que é possível colorir qualquer mapa plano com 4 cores. Por muito tempo, o problema de garantir que 4 cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa plano permaneceu em aberto. Somente, em 1977, é que ele foi provado por Appel e Haken.

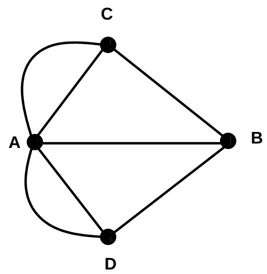
Uma solução para o mapa do Nordeste seria:



1.4 O Que é um Grafo?

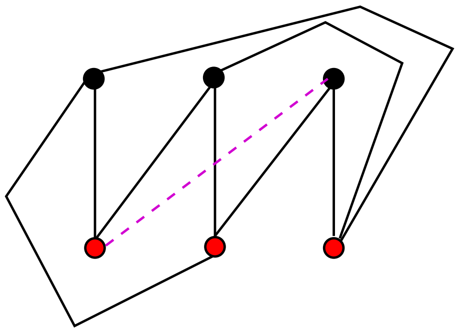
Os exemplos apresentados anteriormente podem ser modelados ou representados por um mesmo tipo de estrutura denominada grafos. A forma mais simples de representar os problemas apresentados é utilizar pontos e linhas.

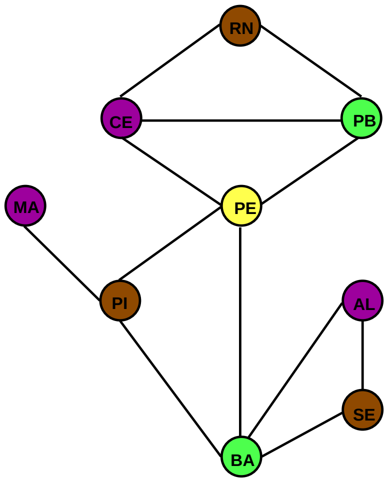
Considere a figura abaixo: os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são chamados de vértices e as linhas que conectam os pontos são conhecidas como arestas. O Conjunto de vértices e arestas é chamado de grafo. Podemos dizer que um grafo é uma série de pontos e as arestas indicam o relacionamento entre estes pontos.



A figura acima é uma abstração do problema das Pontes de Königsberg. Cada um dos pontos representa uma das ilhas. As ilhas estão relacionadas ou ligadas através das pontes. As arestas, neste caso, representam as pontes de nosso problema. É fácil observar que um mesmo grafo pode ter diferentes significados. Ess mesmo grafo poderia representar a tabela de um torneio de futebol, em que os vértices representam times de futebol e as arestas indicam a existência de um jogo entre os vértices adjacentes.

As duas figuras abaixo são grafos que modelam os problemas das três casas e da coloração de mapas.





Observe que no grafo que modela o problema das três casas, não é possível obter um grafo planar. Um grafo é dito planar se não existem duas arestas que se cruzam. O grafo não é planar (veja aresta tracejada).

A representação do mapa da Região Nordeste através de grafo utiliza 9 vértices, um para cada um dos estados. Utilizamos arestas para ligar os estados (vértices) aos seus estados vizinhos. O problema da coloração de mapas pode ser reduzido ao problema de colorir vértices em um grafo.

Existem muitas variações da definição informal de grafos apresentada. Podemos citar:

- Múltiplas arestas entre um mesmo par de vértices.
- Laços.
- Direção nas arestas. Neste caso, é possível distinguir entre o vértice de origem e destino.
- Ponderação nas arestas.

1.5 Grafos no Mundo Real

Existem vários problemas e situações reais que podem ser descritos através de grafos. Alguns exemplos:

Rede de Computadores O conjunto de vértices representa o conjunto de computadores em uma rede. Uma aresta entre dois vértices indica que existe um link de comunicação entre os correspondentes computadores.

Conexão de Vôos Aéreos Os vértices representam aeroportos e as arestas a existência de vôo entre os correspondentes aeroportos. A direção do vôo pode ser descrita através de arestas direcionadas. Seria possível indicar ainda a distância, em milhas, de um vôo. Para tanto, seria necessário atribuir pesos as aresstas.

Restrições de Precedência Suponha que existe um conjunto de tarefas a serem realizadas. Algumas delas devem ser inteiramente completadas antes de outras serem iniciadas. Arestas direcionadas indicariam estas restrições de precedência.

Fluxo de um Programa Cada vértice representa um passo da computação. Arestas direcionadas indicam o fluxo de controle.

1.6 Exercícios

1. Descreva 10 situações ou problemas reais que podem ser modelados através de grafos. Em cada uma das situações, defina o que cada vértice e aresta representa.

2. Desenhe um grafo representando o fluxograma do Curso de Ciência da Computação da UFCG.

3. Cobras comem sapos e pássaros comem aranhas. Pássaros e aranhas comem insetos. Sapos comem lesmas, aranhas e insetos. Desenhe um grafo com arestas direcionadas que representam essa cadeia alimentar.

4. Considere o problema das três casas. Se uma delas não necessitar de telefone, é possível fazer as ligações sem cruzamentos? Desenhe um grafo ilustrando a situação.