Teoria dos Grafos – Período 2003.2
Aula 2 - Definições e Conceitos Básicos

Jorge César Abrantes de Figueiredo

20/11/2003

1 Definições

Um *grafo simples* G é um par de conjuntos (V, E). V é um conjunto finito não-vazio de elementos chamados *vértices*. E é um conjunto finito de *arestas*. Cada aresta é um subconjunto de elementos de V de tamanho 2. Se e é uma aresta, então e é um conjunto da forma $e = \{v, w\}$, em que v e w são elementos distintos de V. É comum omitirmos as chaves na representação de uma aresta. Logo, $e = vw = wv$. A aresta e é dita ser *incidente* a v e w. De forma equivalente, podemos dizer que v e w são *adjacentes* ou *vizinhos*.

Considere o seguinte exemplo de um grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4\}$. G é um grafo com 6 vértices e 6 arestas.

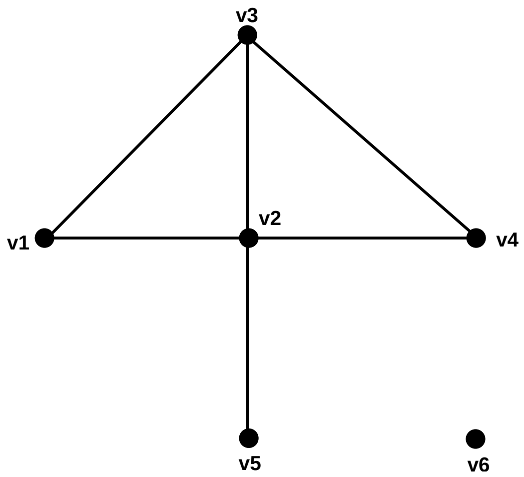

Figura 1: Exemplo de um grafo simples

Uma forma de representar graficamente um grafo é utilizar um diagrama em que pontos representam os vértices e linhas conectando pontos representam as arestas. A Figura 1 é a representação gráfica do grafo G. De fato, na prática, utilizamos mais o formato gráfico para representar grafos.

O *grau* de um vértice v é o número de arestas que incidem em v. Se um vértice tem grau ímpar, ele é dito vértice ímpar. Da mesma forma, se um vértice tem grau par, ele é chamado de vértice par. Alguns livros utilizam a notação

$deg(v)$ para representar o grau do vértice v. Se $deg(v) = 0$, v é um vértice *isolado*. Um grafo é dito *regular* se todos os seus vértices têm o mesmo grau. Se todos os vértices têm grau k, ele é chamado de k-regular. Uma *seqüência de graus* de um grafo consiste em escrever em ordem crescente os graus de seus vértices.

Tomando como exemplo o grafo da Figura 1, os vértices v_1, v_2 e v_4 são vértices pares. Os vértices v_3 e v_5 são vértices ímpares. v_6 é um vértice isolado. $deg(v_1) = deg(v_4) = 2$ e $deg(v_3) = 3$. A seqüência de graus do grafo é $0, 1, 2, 2, 3, 4$. Vértice v_1 é adjacente aos vértices v_2 e v_3, mas não é adjacente aos vértices v_4, v_5 e v_6.

Nem todos os grafos são simples. Existem grafos que permitem múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices. Esse tipo de grafo é denominado *multigrafo*. É possível ainda encontrar grafos que possuam arestas que conectam um vértice a ele próprio. Esse tipo de aresta é chamado de *auto-laço*. Alguns autores chamam grafos com múltiplas arestas e auto-laços de *pseudo-grafos*. Outros chamam simplesmente de grafos. Não existe uma padronização na terminologia utilizada na teoria dos grafos. Cada autor utiliza a que acha mais conveniente. Em nosso curso, vamos usar o termo grafo para representar grafos finitos, não dirigidos, com auto-laços e múltiplas arestas. Caso seja necessário restringir a definição de grafo, faremos explicitamente.

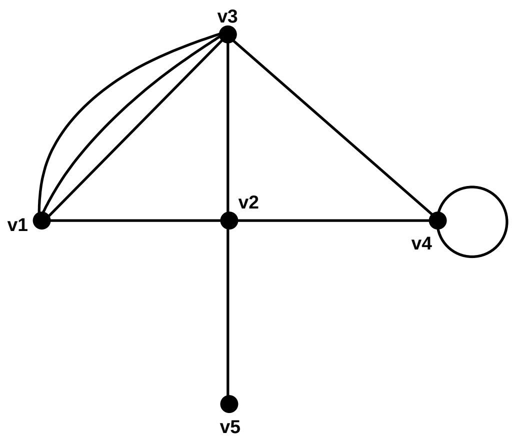

Figura 2: Exemplo de um grafo com múltiplas arestas e auto-laço

A Figura 2 mostra um exemplo de um multigrafo com auto-laço. Existem três arestas conectando v_1 a v_3 e existe um auto-laço no vértice v_4. É interessante observar que $deg(v_4) = 4$ (quando existe auto-laço contamos dobrado o número de arestas incidentes). A seqüência de graus, nesse caso, é $1, 4, 4, 4$ e 5.

Existem duas propriedades de grafos, definidas a partir do conceito de adjacência e grau de vértices que são úteis. Euler definiu que a soma dos graus de vértices de um grafo é um número par, igual a duas vezes o número de arestas. Mais formalmente podemos escrever a seguinte proposição:

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|E|.$$

A prova desta proposição é bem intuitiva. A soma do grau de todos os vértices, significa incrementar de um cada aresta incidente em vada um dos vértices. Uma aresta é contada duas vezes já que ele é incidente a dois vértices. Se tivermos auto-laço, ele também é contado duas vezes.

Uma conseqüência direta desta proposição é que *o número de vértices ímpares em um grafo é par.* No grafo da Figura 2 temos que

$$\sum_{i=1}^{5} deg(v_i) = 4 + 4 + 5 + 4 + 1 = 18 = 2.9 = 2|E|.$$

1.1 Isomorfismo de Grafos

É importante perceber quando dois grafos são essencialmente iguais. A diferença entre dois grafos pode estar apenas nos rótulos associados aos vértices e arestas ou apenas na forma de desenhá-lo. Quando dois grafos são essencialmente iguais, dizemos que eles são *isomórficos*. Portanto, dois grafos são isomórficos quando é possível fazer uma exata correspondência de seus vértices, garantindo que uma aresta entre dois vértices em um grafo corresponda a exatamente uma aresta entre os correspondentes vértices no outro grafo.

Podemos definir isomorfismo de uma forma mais precisa. Considere dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Dizemos que G_1 é isomórfico a G_2 ($G_1 \cong G_2$) se existir uma bijeção f de V_1 em V_2 em que

- se vw é uma aresta em E_1, então $f(v)f(w)$ é uma aresta em E_2, e
- toda aresta em E_2 tem a forma $f(v)f(w)$ para alguma aresta $vw \in E_1$.

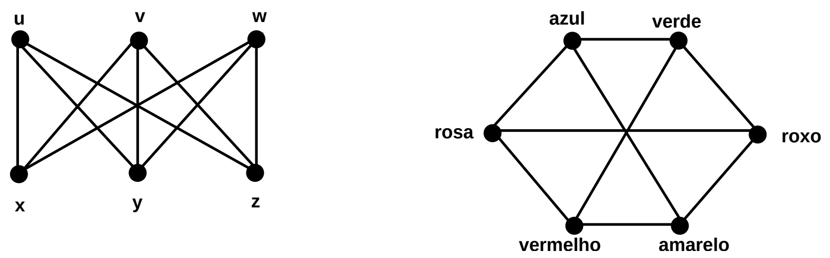

Figura 3: Dois grafos isomórficos

A Figura 3 mostra dois grafos isomórficos. É possível perceber o isomorfismo artavés da seguinte bijeção: $f(u) = azul$, $f(v) = roxo$, $f(w) = vermelho$, $f(x) = verde$, $f(y) = amarelo$ e $f(z) = rosa$.

A definição de isomorfismo é simétrica, reflexiva e transitiva. Logo,

- $G_1 \cong G_2 \Longleftrightarrow G_2 \cong G_1$.
- $G \cong G$ para qualquer grafo.
- $G_1 \cong G_2$ e $G_2 \cong G_3 \Longrightarrow G_1 \cong G_3$.

Se $G_1 \cong G_2$, as seguintes proposições são válidas:

- G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices.
- G_1 e G_2 têm a mesma seqüência de graus.
- G_1 e G_2 têm o mesmo número de arestas.

É importante ressaltar que se dois grafos são isomórficos as proposições acima são válidas. Entretanto, se as três proposiçõs são observadas, ainda assim não podemos garantir que os dois grafos são isomórficos.

1.2 Subgrafos

Um grafo G_1 é um *subgrafo* de um grafo G_2 se e somente se os conjuntos de vértices e arestas de G_1 são, respectivamente, subconjuntos dos conjuntos de vértices e arestas de G_2.

É possível obter subgrafos através da remoção de vértices e arestas. Denotamos por $G\backslash\{e\}$ o subgrafo de G que tem o mesmo conjunto de vértices de G e cujo conjunto de arestas é $E\backslash\{e\}$. Analogamente, $G\backslash\{v\}$ resulta na remoção do vértice v de G e todas as suas arestas incidentes.

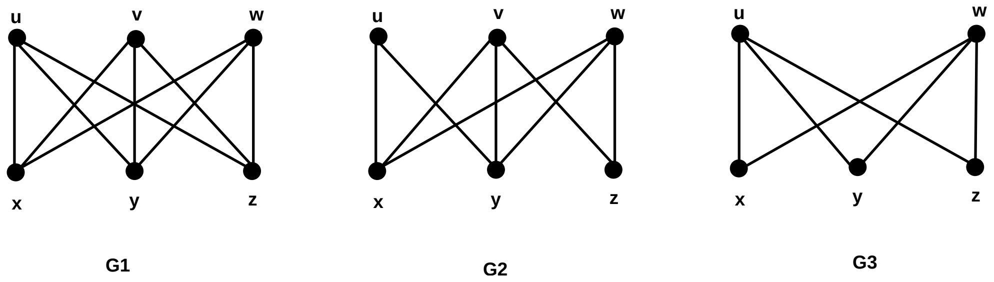

Figura 4: Remoção de vértices e arestas

Na Figura 4, G_2 é subgrafo de G_1 obtido através da remoção em G_1 da aresta uz. G_3 é subgrafo de G_1 obtido através da remoção do vértice v.

1.3 Grafos Completos e Grafos Nulos

Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é dito *grafo nulo*. Um grafo simples é *completo* se qualquer par de vértices distintos é adjacente. Um grafo completo de n vértices é referenciado como K_n.

A Figura 5 apresenta exemplo de três grafos completos K_3, K_4 e K_5.

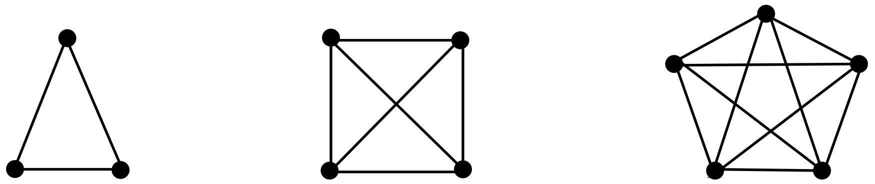

Figura 5: Grafos completos

1.4 Grafos Bipartidos

Um *grafo bipartido* é aquele cujo conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos não vazios V_1 e V_2. Os *conjuntos de bipartição* V_1 e V_2 deve garantir que cada aresta conecta um vértice do conjunto V_1 e um vértice do conjunto V_2.

Um *grafo bipartido completo* é aquele em que cada um dos elementos de V_1 é adjacente a cada um dos elementos de V_2. Um grafo bipartido completo é identificado por $K_{m,n}$ onde m á a aridade de V_1 e n a aridade de V_2.

A Figura 3 mostra dois exemplos de um $K_{3,3}$. No primeiro grafo os conjuntos de bipartição são $V_1 = \{u, v, w\}$ e $V_2 = \{x, y, z\}$. No segundo grafo, por sua vez, $V_1 = \{azul, roxo, vermelho\}$ e $V_2 = \{verde, amarelo, rosa\}$.

1.5 Complemento de um Grafo

Seja G um grafo simples. Seu complemento $\overline{G}$ é o grafo simples com vértice V em que dois vértices são adjacentes se e somente se eles não são adjacentes em G.

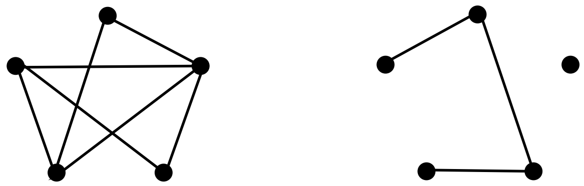

Figura 6: Grafo G e seu complemento

1.6 Exercícios

1. Desenhe:

(a) Um grafo simples.

(b) Um grafo que não é simples e não possui auto-laços.

(c) Um grafo que não é simples e que não possui múltiplas arestas.

(d) Um grafo com seqüência de vértice 3, 3, 5, 5, 5, 5.

(e) K_6.

(f) $K_{4,4}$.

2. Classifique as seguintes afirmações abaixo em *verdadeiro* ou *falso*. Justifique a sua resposta.

   (a) Dois grafos isomórficos quaisquer têm a mesma seqüência de graus.

   (b) Dois grafos quaisquer com a mesma seqüência de graus são isomórficos.

3. Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Seja v um vértice de G com grau k. Determine a quantidade de vértices e arestas dos seguintes grafos:

   (a) $G \backslash e$.

   (b) $G \backslash v$.

4. Para cada uma das seguintes seqüências, determine se existe um grafo cuja seqüência de graus é a especificada. Em cada caso, desenhe o grafo ou explique porque não existe.

   (a) 2, 3, 4, 4, 4.

   (b) 2, 2, 2, 3, ..., 98, 99, 100.

   (c) 1, 2, 3, 4, 5, 5.

   (d) 1, 1, 1, 1, 1, 1.

5. O subgrafo de um grafo bipartido é bipartido? Explique.

6. Quantas arestas tem um grafo k-regular com n vértices?

7. V_1 e V_2 são os conjuntos de bipartição de um grafo k-regular G. Mostre que se $k > 0$ então $|V_1| = |V_2|$.