Teoria dos Grafos
Período 2003.1

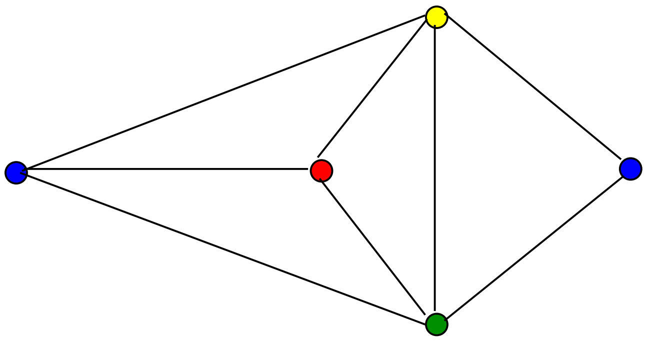
Coloração em Grafos

Coloração em Grafos

Qual o número mínimo de cores que podemos usar para colorir os estados do mapa do Brasil, observando a restrição de que não podemos utilizar a mesma cor em estados que fazem fronteira?

O problema de coloração de mapas está intrinsecamente relacionado com o problema de colorir os vértices de um grafo, em que vértices adjacentes não podem ter a mesma cor. O *Teorema das 4 cores*, provado em 1976, se constitui em um dos mais importantes resultados da matemática (em especial da área de teoria dos grafos) no século XX. Esse problema permaneceu não resolvido desde 1852.

Uma *coloração* de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices, de tal forma que vértices adjacentes apresentam cores distintas. Um grafo G tem uma k-coloração se ele pode ser colorido com k cores. Se G tem k-coloração mas não pode ter $(k-1)$-coloração, dizemos que o número cromático de G é k ou que G é k-cromático. Denotamos por $\chi(G) = k$. A Figura abaixo apresenta um exemplo de um grafo que tem $\chi(G) = 4$.



Existem muitos problemas práticos que podem ser modelados pelo problema de coloração em grafos:

- O problema da escala de horários: vértices representam atividades, arcos indicam que vértices adjacentes não podem ocupar o mesmo horário, e as cores representam slots de tempo. Uma coloração deste grafo representa uma solução viável de escalonamento de atividades nos slots de tempo disponíveis.

- O problema em que devemos isolar determinadas substâncias de um laboratório que são perigosas quando reagem com outras substâncias. É necessário garantir que essas substâncias não sejam armazenadas em salas vizinhas.

Alguns cenários interessantes:

- $\chi(G) = 1$. O que podemos concluir de G? Podemos afirmar que o grafo G não apresenta arcos. Em um grafo com um único arco $\chi(G) = 2$, uma vez que pelo menos dois vértices são adjacentes.

- $\chi(K_n) = n$. Isso implica dizer que é possível ter grafos com número cromático grande.

- $\chi(G) = 2$, se e somente se, G é um grafo bipartido. Toda árvore pode ter uma 2-coloração.

Não é possível garantir que tipos de grafos são 3-cromáticos, embora seja fácil achar exemplo deles.

De uma forma geral, pouco podemos afirmar sobre o número cromático de um grafo arbitrário. Se um grafo tem n vértices, então seu número cromático não pode ultrapassar n. Se um grafo contém K_r como subgrafo, seu número cromático não pode ser menor do que r. Essas considerações não dizem muito. Seria necessário saber o grau de cada vértice para se poder concluir alguma coisa.

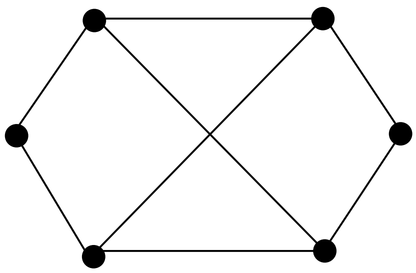
Alguns teoremas úteis:

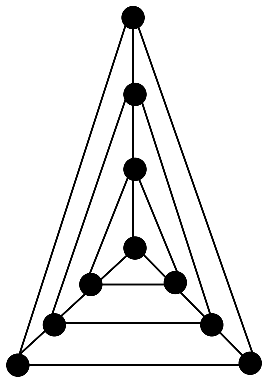
- Se G é um grafo e Δ é o maior grau de seus vértices, então G tem $(\Delta + 1)$-coloração.

- Se G é um grafo conectado que não é completo, e se o maior grau de seus vértices é $\Delta(\geq 3)$, então G tem Δ-coloração.

- Todo grafo planar pode ter 5-coloração.

O que dizer dos números cromáticos dos grafos abaixo?





O Teorema das 4 Cores

Appel e Hasken provaram em 1976 que: Todo grafo planar pode ter coloração com 4 cores (4-coloração). A prova que demorou muito tempo para ser finalizada, baseia-se na prova do teorema das 5 cores.

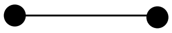
Outras Considerações

- Como determinar o número cromático de um grafo qualquer? Para um grafo pequeno é utilizaros teoremas estabelecidos e/ou utilizar tentativa e erro. Essa solução, entretanto, não é viável para grafos com um grande número de vértices e arcos.
- De fato, não existe nenhum algoritmo eficiente para determinar $\chi(G)$. Esse é um problema NP-Completo.
- O problema de colorir mapas é equivalente ao problema de colorir grafos.

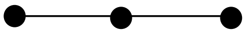
Exercício

Qual o número cromático dos grafos abaixo?

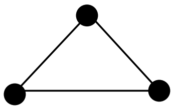
a



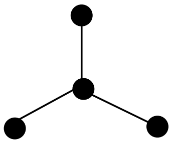
b



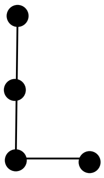
c



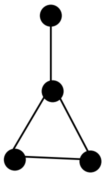
d



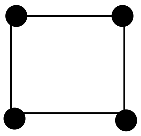
e



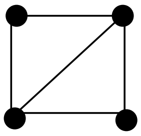
f



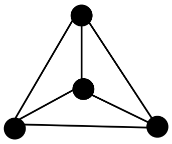
g



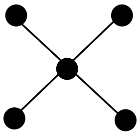
h



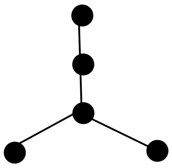
i



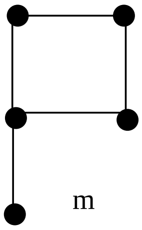
j



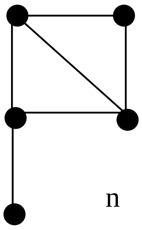
k



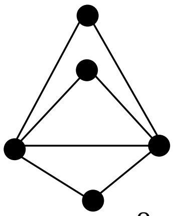
l



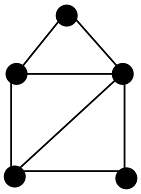
m



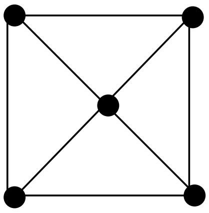
n



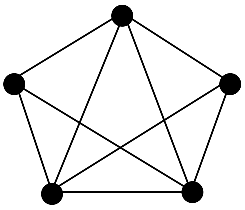
o



p



q



r