

Análise e Técnicas de Algoritmos

Primeira Lista de Exercícios

Aluno(a):

1. Prove por indução:

(a) $\forall n \geq 1, \sum_{i=0}^{n-1} i(i-1)(i-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)/4.$

(b) $\forall n \geq 0, \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = n^2.$

(c) $\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^n i = n.(n+1)/2.$

(d) Para $n \geq 0$, $n^5 - n$ é divisível por 5.

(e) $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$, sabendo que F_n representa o número de Fibonacci.

2. Prove que o seguinte algoritmo recursivo para a exponenciação está correto:

```
function power(y, z)
```

```
  x = 1
```

```
  while z > 0 do
```

```
    x = x.y
```

```
    z = z - 1
```

```
  return(x)
```

3. Provar que o seguinte algoritmo recursivo computa $5^n - 3^n, \forall n \geq 0$.

```
function g(n)
```

```
if n ≤ 1 then
```

```
  return(2n)
```

```
else
```

```
  return(8.g(n-1) - 15.g(n-2))
```

4. Prove que o seguinte algoritmo que computa o quadrado de um número está correto.

```
Int SQR(Int n)
```

```
  S ← 0
```

```
  i ← 0
```

```
  while i < n do
```

```
    S ← S + n
```

```
     $i \leftarrow i + 1$   
return  $S$ 
```

5. Prove que o seguinte algoritmo que computa o fatorial de um número está correto.

```
Int fatorial(Int  $n$ )  
 $F \leftarrow 1$   
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
     $F \leftarrow F * i$   
     $i \leftarrow i + 1$   
return  $F$ 
```

6. O algoritmo a seguir calcula a multiplicação de dois números naturais. Prove sua corretude.

```
Int multiplica( $y, z$ )  
 $x \leftarrow 0$   
while  $z > 0$  do  
    if  $z$  é ímpar then  
         $x \leftarrow x + y$   
     $y \leftarrow 2.y$   
     $z \leftarrow \lfloor z/2 \rfloor$   
return  $x$ 
```