

DSC-CCT-UFPB

Disciplina: Análise e Técnicas de Algoritmos

Professor: Jorge Cesar Abrantes de Figueiredo

Lista de Exercício 1

1. Prove por indução que para $n \geq 0$:

(a) $\sum_{i=1}^n i^3 = n^2(n+1)^2/4$.

(b) $\sum_{i=1}^n (i+1) = n.(n+1).(n+2)/3$.

(c) $\sum_{i=1}^n i.(i+1).(i+2) = n.(n+1).(n+2).(n+3)/4$.

(d) $\sum_{i=0}^n 2^i = 1 - 1/2^{n+1}$.

(e) $\sum_{i=0}^n 2^{n+1-i} = 2^{n+1} - 1$.

(f) $n^3 + 2.n$ é divisível por 3.

(g) $n^5 - n$ é divisível por 5.

(h) $\sum_{i=1}^{n^2} F_i = F_n.F_{n+1}$ ($n \geq 1$).

(i) $F_{n-1}.F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ ($n \geq 2$).

2. Prove por indução que uma árvore com n vértices tem $n - 1$ arcos.

3. Prove que qualquer conjunto de regiões definido por n linhas em um plano pode ser colorido com duas cores de modo que duas regiões que compartilham uma linha não possuam uma mesma cor.

4. Prove que o seguinte algoritmo recursivo que incrementa um número natural está correto.

```
function increment ( $y$ )  
if  $y = 0$  then  
    return(1)  
else  
    if  $y \bmod 2 = 1$  then  
        return(2.increment( $\lfloor y/2 \rfloor$ ))  
    else  
        return( $y + 1$ )  
    end if  
end if
```

5. Prove que o seguinte algoritmo recursivo para a multiplicação de números naturais está correto.

```
function mult( $y, z$ )  
if  $z = 0$  then  
    return(0)  
else  
    return(mult(2. $y, \lfloor z/2 \rfloor$ ) +  $y.(z \bmod 2)$ )  
end if
```

6. Prove que o seguinte algoritmo recursivo que soma os valores de um array $A[1..n]$ está correto.

```
function soma( $n$ )  
if  $n \leq 1$  then  
    return( $A[1]$ )  
else  
    return(soma( $n - 1$ ) +  $A[n]$ )  
end if
```