

# Prova Interativas

João Arthur Thiago Emmanuel

Coordenação de pós-graduação em Informática - COPIN

01/09/2008

# Roteiro

- 1 Prova Interativas
  - Provas Convencionais
  - Provas Interativas: Conceitos
  - Provas Interativas: Formalismo
  - Provando o não-isomorfismo entre Grafos
  - Moedas públicas e AM
  - $IP=PSPACE$
  - Checagem de programas

# Provas Convencionais

## Teorema

For any positive integer  $n$ ,  $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$

## Demonstração.

- **Initial Step.**  $P(1)$  asserts " $1 = 1(2)/2$ ", which is clearly true.
- **Inductive Step.** "If there is a  $k$  such that  $P(k)$  is true, then (for this same  $k$ )  $P(k + 1)$  is true."

$$\begin{aligned}1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= k(k + 1)/2 + (k + 1) = \\ &= (k(k + 1) + 2(k + 1))/2 = (k + 1)(k + 2)/2.\end{aligned}$$



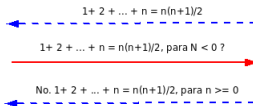


- O provador escreve todas as sentenças
  - O verificador checa a corretude da prova. Não existe interação
- provar-**verificador**



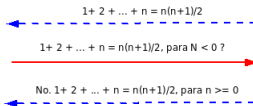
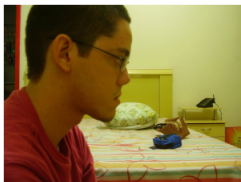
- O provador escreve todas as sentenças
- O verificador checa a corretude da prova. **Não existe interação**  
**provedor-verificador**

# Provas Interativas: Conceitos



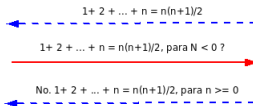
- Troca de mensagens entre o *provador* e o *verificador*
- Poder computacional:
  - Provedor: **Ilimitado**
  - Verificador: **Limitado**

# Provas Interativas: Conceitos



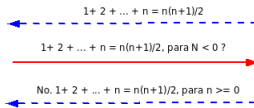
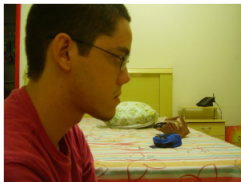
- Troca de mensagens entre o *prorador* e o *verificador*
- Poder computacional:
  - Prorador: **Ilimitado**
  - Verificador: **Limitado**

# Provas Interativas: Conceitos



- Troca de mensagens entre o *prorador* e o *verificador*
- Poder computacional:
  - Prorador: **Ilimitado**
  - Verificador: **Limitado**

# Provas Interativas: Formalismo



- As interações são modeladas por funções

$$a_1 = f(x)$$

$$a_2 = g(x, a_1)$$

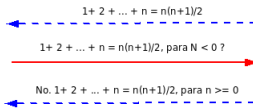
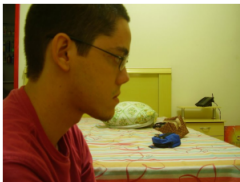
...

$$a_{2i+1} = f(x, a_1, \dots, a_{2i})$$

$$a_{2i+2} = g(x, a_1, \dots, a_{2i+1})$$

- $((f, g)(x) - (2i + 2) - \text{round proof})$

# Provas Interativas: Formalismo



- As interações são modeladas por funções

$$a_1 = f(x)$$

$$a_2 = g(x, a_1)$$

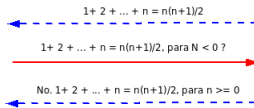
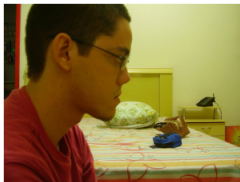
...

$$a_{2i+1} = f(x, a_1, \dots, a_{2i})$$

$$a_{2i+2} = g(x, a_1, \dots, a_{2i+1})$$

- $((f, g)(x) - (2i + 2) - \text{round proof})$

# Provas Interativas: Formalismo



- As interações são modeladas por funções

$$a_1 = f(x)$$

$$a_2 = g(x, a_1)$$

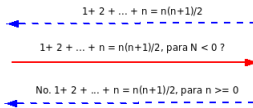
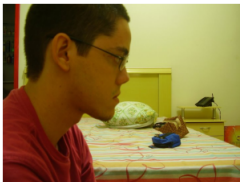
...

$$a_{2i+1} = f(x, a_1, \dots, a_{2i})$$

$$a_{2i+2} = g(x, a_1, \dots, a_{2i+1})$$

- $((f, g)(x) - (2i + 2)\text{-round proof})$

# Provas Interativas: Formalismo



- As interações são modeladas por funções

$$a_1 = f(x)$$

$$a_2 = g(x, a_1)$$

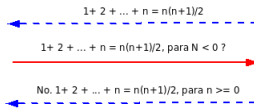
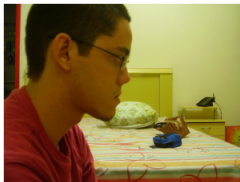
...

$$a_{2i+1} = f(x, a_1, \dots, a_{2i})$$

$$a_{2i+2} = g(x, a_1, \dots, a_{2i+1})$$

- $((f, g)(x) - (2i + 2) - \text{round proof})$

# Provas Interativas: Formalismo



- As interações são modeladas por funções

$$a_1 = f(x)$$

$$a_2 = g(x, a_1)$$

...

$$a_{2i+1} = f(x, a_1, \dots, a_{2i})$$

$$a_{2i+2} = g(x, a_1, \dots, a_{2i+1})$$

- $(\langle f, g \rangle(x) - (2i + 2) - \text{round proof})$

## Provas Interativas: Propriedades

- *Completeness* - Qualquer teorema verdadeiro pode ser provado
- *Soundness* - Nenhum teorema falso pode ser tido como verdadeiro

### Definição

- output
  - $out_f\langle f, g \rangle(x) = f(x, a_1, \dots, a_k)$
  - $out_g\langle f, g \rangle(x) = g(x, a_1, \dots, a_k)$

### Definição

- *Completeness*  $x \in L \Rightarrow \exists P: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* out_v\langle V, P \rangle(x) = 1$
- *Soundness*  $x \notin L \Rightarrow \forall P: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* out_v\langle V, P \rangle(x) = 1$

# Provas Interativas: Classe dIP

## Definição

Uma linguagem  $L$  possui um  $k$  – *round* deterministic interactive proof system, se existir uma  $TM$  que execute em tempo polinomial com a entrada  $x, a_1, \dots, a_k$ , satisfazendo as propriedades *Completeness* e *Soundness*.

## Definição

- **dIP** - Classe das linguagens que possuem  $k$  – *round* deterministic interactive proof system

$$NP = dIP$$

# Provas Interativas: Classe IP

$$\begin{aligned}a_1 &= f(x, r) \\a_2 &= g(x, a_1) \\&\dots \\a_{2i+1} &= f(x, r, a_1, \dots, a_{2i})\end{aligned}$$

## Definição

**IP** - Uma linguagem pertence a  $IP[k]$  se existir uma TM que execute em tempo polinomial com a entrada  $x, r, a_1, \dots, a_k$  e que satisfaça as seguintes propriedades:

- *Completeness*  $x \in L \Rightarrow \exists PPr[out_v\langle V, P \rangle(x) = 1] \geq 2/3$
- *Soundness*  $x \notin L \Rightarrow \forall PPr[out_v\langle V, P \rangle(x) = 1] \leq 1/3$

# Provas Interativas: Classe IP

$$a_1 = f(x, r)$$

$$a_2 = g(x, a_1)$$

...

$$a_{2i+1} = f(x, r, a_1, \dots, a_{2i})$$

## Definição

**IP** - Uma linguagem pertence a  $IP[k]$  se existir uma TM que execute em tempo polinomial com a entrada  $x, r, a_1, \dots, a_k$  e que satisfaça as seguintes propriedades:

- *Completeness*  $x \in L \Rightarrow \exists PPr[out_v\langle V, P \rangle(x) = 1] \geq 2/3$
- *Soundness*  $x \notin L \Rightarrow \forall PPr[out_v\langle V, P \rangle(x) = 1] \leq 1/3$

# Provas Interativas: Classe IP

$$\begin{aligned}a_1 &= f(x, r) \\ a_2 &= g(x, a_1) \\ &\dots \\ a_{2i+1} &= f(x, r, a_1, \dots, a_{2i})\end{aligned}$$

## Definição

**IP** - Uma linguagem pertence a  $IP[k]$  se existir uma TM que execute em tempo polinomial com a entrada  $x, r, a_1, \dots, a_k$  e que satisfaça as seguintes propriedades:

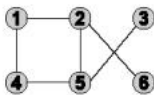
- *Completeness*  $x \in L \Rightarrow \exists PPr[out_v\langle V, P \rangle(x) = 1] \geq 2/3$
- *Soundness*  $x \notin L \Rightarrow \forall PPr[out_v\langle V, P \rangle(x) = 1] \leq 1/3$

# Introdução

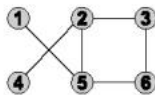
- Grafos
  - Importante objeto de estudo da computação
  - Modelagem de problemas
  - Representados por matrizes, listas de adjacência, incidência etc.
  - Algoritmos

## Isomorfismo

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos ( $G_1 \cong G_2$ ) se existe uma permutação  $\pi$  dos identificadores dos nós tal que  $\pi(G_1) = G_2$ .



$\Gamma_1$



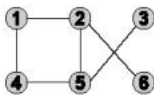
$\Gamma_2$

# Introdução

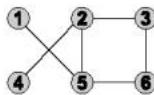
- Grafos
  - Importante objeto de estudo da computação
  - Modelagem de problemas
  - Representados por matrizes, listas de adjacência, incidência etc.
  - Algoritmos

## Isomorfismo

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos ( $G_1 \cong G_2$ ) se existe uma permutação  $\pi$  dos identificadores dos nós tal que  $\pi(G_1) = G_2$ .



$G_1$



$G_2$

# O Problema-Desafio

## Desafio

Decidir se dois grafos são isomorfos.

- GI está em NP, visto que um certificado é a descrição da permutação  $\pi$ .
- Por que é importante?
  - GI e o problema da fatoração são os representantes mais famosos de NP que não se sabe se estão em P ou NP-Completo.

# O Problema-Desafio

## Desafio

Decidir se dois grafos são isomorfos.

- GI está em NP, visto que um certificado é a descrição da permutação  $\pi$ .
- Por que é importante?
  - GI e o problema da fatoração são os representantes mais famosos de NP que não se sabe se estão em P ou NP-Completo.

# O Problema-Desafio

## Desafio

Decidir se dois grafos são isomorfos.

- GI está em NP, visto que um certificado é a descrição da permutação  $\pi$ .
- Por que é importante?
  - GI e o problema da fatoração são os representantes mais famosos de NP que não se sabe se estão em P ou NP-Completo.

# Prova

## Complemento de GI - GNI

Decidir se dois grafos não são isomorfos.

- Protocolo: *Private-coin Graph Non-isomorphism*
  - **V**: escolha  $i \in \{1, 2\}$  randomicamente (uniformemente). Permute os vértices de  $G_i$  para obter um novo grafo  $H$ . Envie  $H$  para **P**.
  - **P**: Identifique qual dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  foi usado para gerar  $H$ . Seja  $G_j$  este grafo. Envie  $j$  para **V**.
  - **V**: Aceita se  $i = j$ ; rejeita caso contrário.

# Prova

## Complemento de GI - GNI

Decidir se dois grafos não são isomorfos.

- Protocolo: *Private-coin Graph Non-isomorphism*
  - **V**: escolha  $i \in \{1, 2\}$  randomicamente (uniformemente). Permute os vértices de  $G_i$  para obter um novo grafo  $H$ . Envie  $H$  para **P**.
  - **P**: Identifique qual dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  foi usado para gerar  $H$ . Seja  $G_j$  este grafo. Envie  $j$  para **V**.
  - **V**: Aceita se  $i = j$ ; rejeita caso contrário.

# Prova

## Complemento de GI - GNI

Decidir se dois grafos não são isomorfos.

- Protocolo: *Private-coin Graph Non-isomorphism*
  - **V**: escolha  $i \in \{1, 2\}$  randomicamente (uniformemente). Permute os vértices de  $G_i$  para obter um novo grafo  $H$ . Envie  $H$  para **P**.
  - **P**: Identifique qual dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  foi usado para gerar  $H$ . Seja  $G_j$  este grafo. Envie  $j$  para **V**.
  - **V**: Aceita se  $i = j$ ; rejeita caso contrário.

# Prova

## Complemento de GI - GNI

Decidir se dois grafos não são isomorfos.

- Protocolo: *Private-coin Graph Non-isomorphism*
  - **V**: escolha  $i \in \{1, 2\}$  randomicamente (uniformemente). Permute os vértices de  $G_i$  para obter um novo grafo  $H$ . Envie  $H$  para **P**.
  - **P**: Identifique qual dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  foi usado para gerar  $H$ . Seja  $G_j$  este grafo. Envie  $j$  para **V**.
  - **V**: Aceita se  $i = j$ ; rejeita caso contrário.

# Prova

- O protocolo acima satisfaz a definição 2, pois:
  - Se ( $G1 \not\equiv G2$ ), então existe um provador tal que:

$$Pr[Vaceita] = 1$$

- Pelo fato de não serem isomorfos, um provador pode dizer com certeza qual dos dois é isomorfo à H
- Se ( $G1 \equiv G2$ ) o provador pode apenas adivinhar, pois uma permutação em  $G1$  é idêntica a uma permutação em  $G2$ . Neste caso, para todo provador:

$$Pr[Vaceita] \leq 1/2$$

- A probabilidade pode ser reduzida para  $1/3$  por repetições paralelas ou sequenciais

# Moedas públicas e AM

- Provas interativas com moedas públicas: Modelo em que o provador tem acesso irrestrito às *strings* randômicas do verificador
- Metáfora Rei-Mágico (Arthur e Merlin).

## Definição

$\forall k$ ,  $AM[k]$  é a classe das linguagens que podem ser decididas por uma prova interativa de  $k$  rodadas, onde as mensagens do verificador consistem em enviar uma *string* de tamanho polinomial e essas mensagens englobam todas as moedas lançadas anteriormente pelo verificador.

## Moedas públicas e AM

- Provas interativas com moedas públicas: Modelo em que o provador tem acesso irrestrito às *strings* randômicas do verificador
- Metáfora Rei-Mágico (Arthur e Merlin).

### Definição

$\forall k$ ,  $AM[k]$  é a classe das linguagens que podem ser decididas por uma prova interativa de  $k$  rodadas, onde as mensagens do verificador consistem em enviar uma *string* de tamanho polinomial e essas mensagens englobam todas as moedas lançadas anteriormente pelo verificador.

# Moedas públicas e AM

## Definição

AM[2] é a classe das linguagens com provas interativas que consiste no envio de uma mensagem com uma string **randômica** pelo verificador, o provador responde com uma mensagem e a decisão de aceitar é obtida aplicando uma função polinomial determinística à transcrição.

$$AM = AM[2]$$

- Nesta representação, Arthur (verificador) é uma máquina probabilística polinomial, enquanto Merlin (o provador) não possui limites de recursos computacionais
- Merlin não é totalmente confiável
- Arthur deve analisar as respostas e decidir por si só

## Moedas públicas e AM - Quando um problema é decidível?

- Um problema é considerado decidível se:
  - Sempre que houver uma resposta “sim”, Merlin tem uma série de respostas que levam a Arthur aceitar no mínimo  $2/3$  das vezes
  - Sempre que houver uma resposta “não”, Arthur nunca vai aceitar mais do que  $1/3$  das vezes

Neste caso, Arthur age como um verificador BPP, assumindo que ele alocou tempo polinomial para decidir e fazer as perguntas

# A classe MA

## Definição

Classe dos problemas de decisão resolvíveis pelo protocolo MA

- Merlin envia para Arthur uma prova de tamanho polinomial cuja resposta é “sim”
- Arthur tem que verificar a prova em BPP (polinomial probabilística)
  - Sim: Existe uma prova tal que Arthur aceita com probabilidade no mínimo  $2/3$
  - Não: Para todas as provas, Arthur aceita com probabilidade no máximo  $1/3$

# Observações

## Observação

$$AM[k] \subseteq IP[K]$$

- A prova para GNI depende do fato de P não ver os bits randômicos de V. Do contrário, P conheceria  $i$  e adivinharia sempre corretamente.
- Surpreendentemente verifica-se que este sistema é tão poderoso quanto o de moedas privadas, em que o verificador não precisa enviar suas moedas ao provador

## Relações entre as classes

### Teorema

$AM[k] = AM$ , exceto pelo fato de que há  $k$  iterações entre Arthur e Merlin

### Teorema

Para  $k > 2$ ,  $AM[k] = AM[2] = AM$

## Relações entre as classes

### Teorema

$AM[k] = AM$ , exceto pelo fato de que há  $k$  iterações entre Arthur e Merlin

### Teorema

Para  $k > 2$ ,  $AM[k] = AM[2] = AM$

# GNI está em AM[k]

## Teorema

$GNI \in AM[K]$  para algum  $K \geq 2$

- Re-modelando o problema
- $S = \{H : H \equiv G1 \text{ ou } H \equiv G2\}$
- permutação de G1 ou G2
- $n!$  grafos equivalentes
  - Se  $G1 \not\equiv G2$  então  $|S| = 2n!$
  - Se  $G1 \equiv G2$  então  $|S| = n!$
- No caso geral, G1 ou G2 tem menos que  $n!$  grafos equivalentes

# GNI está em AM[k]

## Teorema

$GNI \in AM[K]$  para algum  $K \geq 2$

- Re-modelando o problema
- $S = \{H : H \equiv G1 \text{ ou } H \equiv G2\}$
- permutação de G1 ou G2
- $n!$  grafos equivalentes
  - Se  $G1 \not\equiv G2$  então  $|S| = 2n!$
  - Se  $G1 \equiv G2$  então  $|S| = n!$
- No caso geral, G1 ou G2 tem menos que  $n!$  grafos equivalentes

# GNI está em $AM[k]$

Continuação...

## Definição

$$S = \{ (H, \pi) \mid H \equiv G1 \text{ ou } H \equiv G2 \text{ e } \pi \in \text{aut}(H) \}$$

- Onde  $\pi \in \text{aut}(H)$  se  $\pi(H) = H$
- Convencer o verificador de que  $G1 \not\equiv G2$

*Set lower bound protocol!*

# GNI está em $AM[k]$

Continuação...

## Definição

$$S = \{ (H, \pi) \mid H \equiv G1 \text{ ou } H \equiv G2 \text{ e } \pi \in \text{aut}(H) \}$$

- Onde  $\pi \in \text{aut}(H)$  se  $\pi(H) = H$
- Convencer o verificador de que  $G1 \not\equiv G2$

*Set lower bound protocol!*

## Set lower bound protocol

Protocolo que completa a prova 7.

- Provedor mostra ao verificador que, dado um conjunto  $S$ :
  - Se  $|S| > K$ , o provedor leva o verificador a aceitar com alta probabilidade
  - Se  $|S| \leq K/2$ , o verificador vai rejeitar com alta probabilidade, não importando o que o provedor faça

## Pairwise independent hash functions

- *Universal Hashing*: Algoritmo para escolher uma função *hash*  $F$  tal que:
  - Para duas entradas distintas  $x$  e  $y$ , a probabilidade de uma colisão é a mesma se a função fosse randômica
  - $F(x) \leq 1/|r|$

*Two-Universal Family*

$$\Pr_{h \in H} [h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{|V|} \quad (1)$$

*Strongly Two-Universal Family (Pairwise independent hash functions)*

$$\Pr_{h \in H} [h(x) = x' \text{ and } h(y) = y'] = \frac{1}{2^{2n}} \quad (2)$$

## Pairwise independent hash functions

- *Universal Hashing*: Algoritmo para escolher uma função *hash*  $F$  tal que:
  - Para duas entradas distintas  $x$  e  $y$ , a probabilidade de uma colisão é a mesma se a função fosse randômica
  - $F(x) \leq 1/|r|$

### *Two-Universal Family*

$$\Pr_{h \in H} [h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{|V|} \quad (1)$$

*Strongly Two-Universal Family (Pairwise independent hash functions)*

$$\Pr_{h \in H} [h(x) = x' \text{ and } h(y) = y'] = \frac{1}{2^{2n}} \quad (2)$$

## Pairwise independent hash functions

- *Universal Hashing*: Algoritmo para escolher uma função *hash*  $F$  tal que:
  - Para duas entradas distintas  $x$  e  $y$ , a probabilidade de uma colisão é a mesma se a função fosse randômica
  - $F(x) \leq 1/|r|$

### *Two-Universal Family*

$$\Pr_{h \in H} [h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{|V|} \quad (1)$$

### *Strongly Two-Universal Family (Pairwise independent hash functions)*

$$\Pr_{h \in H} [h(x) = x' \text{ and } h(y) = y'] = \frac{1}{2^{2n}} \quad (2)$$

# GoldWasserSipser Set LowerBound

- Condições:

- $S \subseteq \{0, 1\}^m$  é um conjunto cujo membros podem ser certificados
- Ambos conhecem  $K$
- Proveedor precisa convencer o verificador que  $|S| \geq K$
- Verificador deve rejeitar se  $|S| \leq \frac{K}{2}$
- $2^{k-2} \leq K \leq 2^{k-1}$

- Protocolo:

- **V**: Escolha randomicamente uma função  $h: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^k$ .  
Escolha  $y \in R\{0, 1\}^k$  e envie  $h, y$  ao proveedor
- **P**: Tente achar um  $x \in S$  tal que  $h(x) = y$ . Envie esse  $x$  para **V**,  
juntamente com um certificado de que  $x \in S$
- **Saída de V**: Se o certificado valida que  $x \in S$  e  $h(x) = y$ , aceita.  
Rejeita caso contrário.

# GoldWasserSipser Set LowerBound

- Condições:

- $S \subseteq \{0, 1\}^m$  é um conjunto cujo membros podem ser certificados
- Ambos conhecem  $K$
- Proveedor precisa convencer o verificador que  $|S| \geq K$
- Verificador deve rejeitar se  $|S| \leq \frac{K}{2}$
- $2^{k-2} \leq K \leq 2^{k-1}$

- Protocolo:

- **V**: Escolha randomicamente uma função  $h: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^k$ . Escolha  $y \in R\{0, 1\}^k$  e envie  $h$ ,  $y$  ao proveedor
- **P**: Tente achar um  $x \in S$  tal que  $h(x) = y$ . Envie esse  $x$  para **V**, juntamente com um certificado de que  $x \in S$
- **Saída de V**: Se o certificado valida que  $x \in S$  e  $h(x) = y$ , aceita. Rejeita caso contrário.

# GoldWasserSipser Set LowerBound

- Condições:

- $S \subseteq \{0, 1\}^m$  é um conjunto cujo membros podem ser certificados
- Ambos conhecem  $K$
- Proveedor precisa convencer o verificador que  $|S| \geq K$
- Verificador deve rejeitar se  $|S| \leq \frac{K}{2}$
- $2^{k-2} \leq K \leq 2^{k-1}$

- Protocolo:

- **V**: Escolha randomicamente uma função  $h: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^k$ .  
Escolha  $y \in R\{0, 1\}^k$  e envie  $h, y$  ao proveedor
- **P**: Tente achar um  $x \in S$  tal que  $h(x) = y$ . Envie esse  $x$  para **V**, juntamente com um certificado de que  $x \in S$
- **Saída de V**: Se o certificado valida que  $x \in S$  e  $h(x) = y$ , aceita.  
Rejeita caso contrário.

# GoldWasserSipser Set LowerBound

- Condições:

- $S \subseteq \{0, 1\}^m$  é um conjunto cujo membros podem ser certificados
- Ambos conhecem  $K$
- Provedor precisa convencer o verificador que  $|S| \geq K$
- Verificador deve rejeitar se  $|S| \leq \frac{K}{2}$
- $2^{k-2} \leq K \leq 2^{k-1}$

- Protocolo:

- **V**: Escolha randomicamente uma função  $h: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^k$ .  
Escolha  $y \in R\{0, 1\}^k$  e envie  $h, y$  ao provedor
- **P**: Tente achar um  $x \in S$  tal que  $h(x) = y$ . Envie esse  $x$  para **V**, juntamente com um certificado de que  $x \in S$
- **Saída de V**: Se o certificado valida que  $x \in S$  e  $h(x) = y$ , aceita. Rejeita caso contrário.

# Prova para GNI

- A prova consiste em várias iterações entre verificador e provador
- Usa *set lower bound protocol* para o conjunto  $S$
- O verificador aceita se a fração de iterações que aceitam for no mínimo 0.6p

## Private coin X Public coin

- *Set lower bound protocol* não possui a propriedade de completude
- No entanto, qualquer protocolo de moedas privadas pode ser transformado em um protocolo perfeito e completo de moedas públicas, com um número similar de rodadas

# IP=PSPACE

## Teorema

$$IP = PSPACE$$

## Demonstração.

- 1  $IP \subseteq PSPACE$  - Simular a execução de um prova interativa por uma máquina  $PSPACE$
- 2  $PSPACE \subseteq IP$  - Mostrar que um problema  $PSPACE$  – *complete*  $\in IP$



# $TQBF \subseteq PSPACE$

## Demonstração.

### Aritmetização de TBQF

- 1 Substituir cada variável booleana  $x$  por um inteiro  $z$
- 2 Substituir cada ocorrência da negação de  $x$  por  $(1 - z)$
- 3 Substituir:  $\wedge$  pela operação de multiplicação,  $\vee$  pela operação de soma,  $\exists$  por um somatório e  $\forall$  pelo produtório.

Um TBQF é verdadeiro se o seu valor numérico é não negativo □

# Checagem de Programas

- Verificação de programas é indecidível
- *Program Checker*: Um programa **C** que executa outro programa **P** para uma entrada  $x$  e detecta se a saída está incorreta
- **C** precisa computar a saída de **P** para outras entradas
- Também chamada de *instance checking*

## Observação

*Program testing can be used to show the presence of bugs, but never to show their absence.*

# Checker

Seja  $P$  um programa que computa uma tarefa  $T$ .

- Checador ( $C$ ) é uma máquina polinomial que, dada uma entrada  $x$ , possui o seguinte comportamento:
  - Se  $\forall y, P(y) = T(y)$ , então  $P[C^P \text{ aceitar } P(x)] \geq \frac{2}{3}$
  - Se  $P(x) \neq T(x)$ , então  $P[C^P \text{ aceitar } P(x)] < \frac{1}{3}$

# GNI checker

Para muitos problemas, construir um checador pode ser mais fácil que construir a solução.

- GNI possui um checador eficiente:
  - Protocolo definido anteriormente
  - No caso do provador admitir que  $G1 \neq G2$ , repita K vezes:
  - Escolha  $i \in R\{1,2\}$ . Permute  $G_i$  randomicamente em H
  - Pergunte ao provador  $\langle G1, H \rangle$ ;  $\langle G2, H \rangle$  e cheque para ver se a primeira resposta é consistente
- Se uma linguagem L possui um sistema de prova interativo onde o provador pode ser implementado usando acesso a oráculo, então esta linguagem possui um checador

# GNI checker

Para muitos problemas, construir um checador pode ser mais fácil que construir a solução.

- GNI possui um checador eficiente:
  - Protocolo definido anteriormente
    - No caso do provador admitir que  $G1 \neq G2$ , repita K vezes:
    - Escolha  $i \in R\{1,2\}$ . Permute  $G_i$  randomicamente em H
    - Pergunte ao provador  $\langle G1, H \rangle$ ;  $\langle G2, H \rangle$  e cheque para ver se a primeira resposta é consistente
  - Se uma linguagem L possui um sistema de prova interativo onde o provador pode ser implementado usando acesso a oráculo, então esta linguagem possui um checador

# GNI checker

Para muitos problemas, construir um checador pode ser mais fácil que construir a solução.

- GNI possui um checador eficiente:
  - Protocolo definido anteriormente
  - No caso do provador admitir que  $G1 \neq G2$ , repita K vezes:
    - Escolha  $i \in R\{1,2\}$ . Permute  $G_i$  randomicamente em H
    - Pergunte ao provador  $\langle G1, H \rangle$ ;  $\langle G2, H \rangle$  e cheque para ver se a primeira resposta é consistente
- Se uma linguagem L possui um sistema de prova interativo onde o provador pode ser implementado usando acesso a oráculo, então esta linguagem possui um checador

# GNI checker

Para muitos problemas, construir um checador pode ser mais fácil que construir a solução.

- GNI possui um checador eficiente:
  - Protocolo definido anteriormente
  - No caso do provador admitir que  $G1 \neq G2$ , repita K vezes:
  - Escolha  $i \in R\{1,2\}$ . Permute  $G_i$  randomicamente em H
  - Pergunte ao provador  $\langle G1, H \rangle$ ;  $\langle G2, H \rangle$  e cheque para ver se a primeira resposta é consistente
- Se uma linguagem L possui um sistema de prova interativo onde o provador pode ser implementado usando acesso a oráculo, então esta linguagem possui um checador

# GNI checker

Para muitos problemas, construir um checador pode ser mais fácil que construir a solução.

- GNI possui um checador eficiente:
  - Protocolo definido anteriormente
  - No caso do provador admitir que  $G1 \neq G2$ , repita K vezes:
  - Escolha  $i \in R\{1,2\}$ . Permute  $G_i$  randomicamente em H
  - Pergunte ao provador  $\langle G1, H \rangle$ ;  $\langle G2, H \rangle$  e cheque para ver se a primeira resposta é consistente
- Se uma linguagem L possui um sistema de prova interativo onde o provador pode ser implementado usando acesso a oráculo, então esta linguagem possui um checador

## GNI checker

Para muitos problemas, construir um checador pode ser mais fácil que construir a solução.

- GNI possui um checador eficiente:
  - Protocolo definido anteriormente
  - No caso do provador admitir que  $G1 \neq G2$ , repita K vezes:
  - Escolha  $i \in R\{1, 2\}$ . Permute  $G_i$  randomicamente em H
  - Pergunte ao provador  $\langle G1, H \rangle$ ;  $\langle G2, H \rangle$  e cheque para ver se a primeira resposta é consistente
- Se uma linguagem L possui um sistema de prova interativo onde o provador pode ser implementado usando acesso a oráculo, então esta linguagem possui um checador